

## I.

1. Az  $\{a_n\}$  számtani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, a második és negyedik tagjának összege pedig 130.

a) Adja meg a sorozat ötödik tagját!

A  $\{b_n\}$  mértani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, a második és negyedik tagjának összege pedig 130.

b) Adja meg a sorozat ötödik tagját!

2. Marci szeret az autók rendszámában különböző matematikai összefüggéseket felfedezni. (A rendszámok Magyarországon három betűből és az azokat követő három számjegyből állnak.) Az egyik általa kedvelt típusnak a „prímes” nevet adta: az ilyen rendszámoknál a PRM betűket követő három számjegy szorzata prímszám.

a) Hány különböző „prímes” rendszám készíthető?



Egy másik típusnak a „hatos” nevet adta: az ilyen rendszámokban a HAT betűket követő három számjegy összege 6.

b) Hány különböző „hatos” rendszám készíthető?



Egy harmadik típus a „logaritmosos”. Ezek általános alakja: LOG- $abc$ , ahol az  $a$ ,  $b$  és  $c$  számjegyekre (ebben a sorrendben) teljesül, hogy  $\log_a b = c$ .

c) Hány különböző „logaritmosos” rendszám készíthető?



3. A mellékelt ábrán egy kereszt alakú lemez látható, amely 5 db 10 cm oldalú négyzetből áll. A lemezből egy 10 cm alapélű, szabályos négyoldalú gúla hálóját szeretnénk kivágni úgy, hogy a középső négyzet legyen a gúla alaplappja.

a) Igazolja, hogy a lehetséges hálók kivágása során keletkező hulladék legalább  $200 \text{ cm}^2$ , de kevesebb  $300 \text{ cm}^2$ -nél!

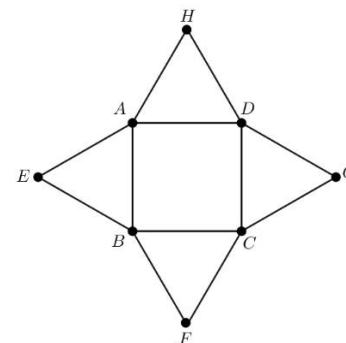
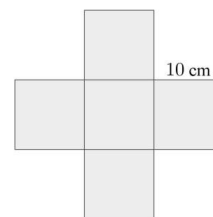
Tekintsük az ábrán látható nyolcpontú gráfot.

b) A gráfban véletlenszerűen kiválasztunk két csúcsot.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két csúcsot él köti össze a gráfban?

c) A gráf 9 élét kékre, 3 élét pedig zöldre színezzük.

Igazolja, hogy bármelyik ilyen színezésnél lesz a gráfban egyszínű (gráfelméleti) kör!



4. Adott az  $x^2 - (4p+1)x + 2p = 0$  másodfokú egyenlet, ahol  $p$  valós paraméter.

a) Igazolja, hogy bármely valós  $p$  érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van!

b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke?

c) Határozza meg a  $p$  paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen!

## II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

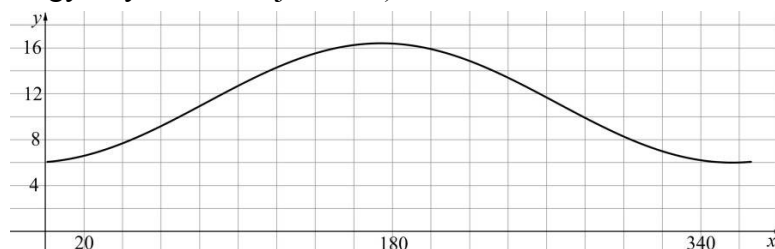
5. Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő  $f$  függvénnyel lehet modellezni:

$$f(n) = -5,2 \cdot \cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11,2$$

ahol  $n$  az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül,  $f(n)$  pedig a nappal hossza órában számolva ( $1 \leq n \leq 365$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ).

Az alábbi ábra a  $g: [1; 365] \rightarrow \mathbf{R}$ ;  $g(x) = -5,2 \cdot \cos\left(\frac{x+8}{58}\right) + 11,2$  függvényt szemlélteti.

(A  $g$  függvény az  $f$ -nek egy folytonos kiterjesztése.)



a) Ha  $x = 1$ , akkor  $\frac{x+8}{58}$  helyettesítési értéke  $\frac{9}{58}$ .

Adja meg a  $\frac{9}{58}$  radián értékét fokban mérve!

b) Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal!

Válaszát óra : perc formátumban, egész percre kerekítve adja meg!

c) Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb!

Adott egy másik, az  $y = -5,2\cos(x) + 11,2$  egyenletű görbe, valamint az  $x = 0$ , az  $y = 0$  és az  $x = 2\pi$  egyenletű egyenesek.

d) Számítsa ki a görbe és a három egyenes által határolt korlátos síkidom területét!

6. a) Hány olyan 90-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely a 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható?

Az ötöslottó-játékban az első 90 pozitív egész számból kell öt különbözőt megjelölni. A sorsoláson öt (különböző) nyerőszámot húznak ki. (Sem a megjelölés, sem a kihúzás sorrendje nem számít.)

Kati a 7, 9, 14, 64, 68 számokat jelölte meg. A sorsoláson az első három kihúzott nyerőszám a 7, a 9 és a 14 volt. Kati úgy gondolja, hogy most nagy esélye van legalább négy találatot elérni.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a hátralevő két nyerőszám közül Kati legalább az egyiket eltalálja!

Az egyik játékhéten összesen 3 222 831 lottószelvényt küldtek játékba a játékosok. Az alábbi táblázat mutatja a nyertes szelvények számát és nyereményét (2-nél kevesebb találatnál nem lehet nyerni).

Találatok száma	Nyertes szelvények száma	Nyeremény (Ft/nyertes szelvény)
5	0	0
4	17	3 113 255
3	1617	34 915
2	62 757	1970

c) Számítsa ki, mennyi volt a játékosok egy lottószelvényre jutó átlagos vesztesége ezen a héten, ha a játékba küldött szelvények egységára 250 Ft!

7. Az  $ABCD$  húrnégyszögben  $AB = 20$ ,  $BC = 18$ ,  $\sphericalangle ABC = 70^\circ$ ,  $\sphericalangle CAD = 50^\circ$ .

a) Milyen hosszú a  $CD$  oldal, és mekkora a húrnégyszög területe?

A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a  $P(-2; 0)$ ,  $Q(6; 0)$  és  $R(0; 5)$  pontok, a  $H$  pedig a  $PQ$  szakasz tetszőleges pontja.

b) Számítsa ki a  $\overrightarrow{PH}$  és az  $\overrightarrow{RH}$  vektorok skaláris szorzatát, ha  $H(-1,8; 0)$ .

c) Adja meg a  $H$  pont koordinátáit úgy, hogy a  $\overrightarrow{PH}$  és az  $\overrightarrow{RH}$  vektorok skaláris szorzata maximális, illetve úgy is, hogy minimális legyen!

- 8.** Egy étteremben (hatósági engedély birtokában) az érvényes általános forgalmi adótól (áfa) kismértékben eltérő adókulcsok alkalmazásának hatását vizsgálták az ételek és italok fogyasztására nézve. Az ételek esetében 4%, az italok esetében 30% áfát adtak hozzá a nettó árhoz, és az így kapott bruttó árat kellett a vendégnek kifizetnie.

A kísérlet első napján az új számítógépes program hibája miatt a számlán éppen fordítva adták a nettó árakhoz az áfát: az ételek nettó árához 30%-ot, az italok nettó árához pedig 4%-ot számoltak hozzá, és ez a számlán is így, hibásan jelent meg.

Egy család ebben a vendéglőben ebédelt, és a hibás program miatt 8710 Ft-os számlát kapott. A hibát észrevették, így végül a helyes összeget, 7670 Ft-ot kellett kifizetniük.

- a)** Hány forint volt az elfogyasztott ételek, és hány forint volt az elfogyasztott italok helyes bruttó ára?

Egy másik étteremben 12 és 14 óra között 3900 Ft befizetéséért annyit eszik és iszik a vendég, amennyit szeretne.

A befizetendő összeget egy előzetes felmérés alapján állapították meg. A felmérés során minden vendég esetén összeadták az elfogyasztott étel és ital árát az adott fogyasztáshoz tartozó összes egyéb költséggel. Az összesített költségek alapján osztályokba sorolták a vendégeket aszerint, hogy az étteremnek hány forintjába kerültek.

Az alábbi táblázat mutatja a felmérés eredményét. A táblázat első sorában az osztályközepek láthatók.

Fejenként ennyi Ft-ba került az étteremnek	1000	1900	2800	3600	4400	5200
a vendégek ennyi %-a	10	20	25	30	10	5

- b)** A felmérés eredményét felhasználva számítsa ki, hogy ennek az étteremnek 1000 vendég esetén mekkora a várható haszna!
- c)** A fenti táblázat értékeivel számolva mennyi a valószínűsége, hogy két (ebédre betérő) vendég együttes fogyasztása veszteséget jelent az étteremnek?  
(A táblázatba foglalt információkat tekinthetjük úgy, hogy egy véletlenszerűen betérő vendég esetén pl. 0,25 annak a valószínűsége, hogy a vendég 2800 Ft-ba kerül az étteremnek.)
- 9.** Egy városban a közösségi közlekedést kizárólag vonaljeggyel lehet igénybe venni, minden utazáshoz egy vonaljegyet kell váltani. A vonaljegy ára jelenleg 300 tallér. Az utazások száma naponta átlagosan 100 ezer. Ismert az is, hogy ennek kb. 10%-ában nem váltanak jegyet (bliccelnek). A városi közlekedési társaság vezetői hatástanulmányt készítettek a vonaljegy árának esetleges megváltoztatásáról. A vonaljegy árát 5 talléronként lehet emelni vagy csökkenteni. A hatástanulmány szerint a vonaljegy árának 5 talléros emelése várhatóan 1000-rel csökkenti a napi utazások számát, és 1 százalékponttal növeli a jegy nélküli utazások (bliccelések) arányát. (Tehát például 310 talléros jegyár esetén naponta 98 000 utazás lenne, és ennek 12%-a lenne bliccelés.) Ugyanez fordítva is igaz: a vonaljegy árának minden 5 talléros csökkentése 1000-rel növelné a napi utazások számát, és 1 százalékponttal csökkentené a bliccelések arányát. A tanulmány az alkalmazott modellben csak a 245 tallérról drágább, de 455 tallérról olcsóbb lehetséges jegyárakat vizsgálta.
- a)** Mekkora lenne a közlekedési társaság vonaljegyekből származó napi bevétele a hatástanulmány becslései alapján, ha 350 tallérra emelnék a vonaljegyek árát?
- b)** Hány talléros vonaljegy esetén lenne maximális a napi bevétel?

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b
5	6	3	5	6	6	4	3	3	4	6	2	3	7	4	6	6	4	7	2	7	7	3	6	4	12