I.

1. Az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = 17$ cm és $AD = 8$ cm.

a) Mekkora területű részt fed le a téglalapból az A középpontú, 17 cm sugarú kör?

b) Az $APCQ$ rombusz P csúcsa a téglalap AB oldalának belső pontja, Q csúcsa pedig a CD oldal belső pontja. Számítsa ki a rombusz kerületét!

2. a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$|x-2| = 7 + x - 0{,}25x^2$$

b) Hány olyan egész szám van, amelyik megoldása az alábbi egyenlőtlenségnek?

$$\log_2\left(x^2 - 200\right) < 20$$

3. Az interneten 2018 nyarán több hírportálon is megjelent az alábbi két hír.

I. 2018 júliusában az álláskeresők 26,0%-a, 67 000 ember tartósan (több mint egy éve) keresett munkát;

II. 2018 júliusában az álláskeresők aránya a *munkavállalási korú népesség*hez viszonyítva 3,8%, a *gazdaságilag aktív népesség*hez viszonyítva pedig 5,6% volt. (Feltételezhetjük, hogy a munkavállalási korú népességnek részhalmaza a gazdaságilag aktív népesség.)

a) Számítsa ki a közölt adatok alapján az álláskeresők számát! Válaszát tízezer főre kerekítve adja meg!

b) A munkavállalási korú népességnek hány százaléka volt a gazdaságilag aktív népesség?

Egy szintén 2018-as, internetes hír arról szól, hogy 2017 decemberében a nemzetgazdasági bruttó havi átlagkereset 328 000 Ft volt, a bruttó havi keresetek mediánja pedig 256 000 Ft körül lehetett.

c) Adjon meg 7 olyan különböző pozitív számot, amelyek átlaga nagyobb, mint a mediánja! Adja meg a hét szám átlagát és mediánját is!

d) Virág úr úgy tudja, hogy ő többet keres, mint a dolgozók fele. Véleménye szerint emiatt neki az átlagkeresetnél többet kellene kapnia, mégis csak 283 000 Ft a havi bruttó bére. Ezért azt gondolja, hogy a közölt statisztikai adatok hibásak.
Indokolja röviden (1-2 mondatban), hogy Virág úr következtetése miért nem megalapozott!

4. Adott az $y = 7 - \frac{1}{2}x$ egyenletű e egyenes.

a) Egy négyzet egyik csúcsa az origó, egyik átlójának egyenese pedig az e.
Számítsa ki a négyzet középpontjának koordinátáit és a négyzet területét!

b) Számítsa ki annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet az $y = -\frac{(x-4)^2}{4} + 7$ egyenletű parabola és az e egyenes határol!

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Egy szigorúan monoton növekvő sorozat első négy tagja az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz eleme. A sorozat tagjai között nincsenek szomszédos egész számok.

a) Hányféleképpen választható meg a sorozat első négy tagja?

A háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott szám számjegyei balról jobbra egyesével nőnek vagy egyesével csökkennek.

Az a, b, c és d szomszédos számjegyek a tízes számrendszerben, $a \neq 0$, és $a < b < c < d$. Az N szám kilences számrendszerbeli alakja $\overline{abc}$, nyolcas számrendszerbeli alakja pedig $\overline{bcd}$.

c) Határozza meg az N szám tízes számrendszerbeli alakját!

6. Egy szabályos tízszög legrövidebb átlója 6 cm hosszú.

a) Határozza meg a tízszög oldalának hosszát!

Legyen *G* egy tízpontú egyszerű gráf, melynek összesen 6 éle van.

b) Igaz-e, hogy *G* csúcsai közt biztosan van legalább két olyan, amelynek a fokszáma legalább 2? Válaszát indokolja!

Egy *n* pontú teljes gráf egyik élét pirosra színeztük ($n \geq 3$). Ezután a többi él közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Legyen az *A* esemény az, hogy a kiválasztott élnek és a pirosra színezett élnek van közös csúcsa, a *B* esemény pedig az, hogy nincs közös csúcsuk.

c) Ha az *A* és a *B* esemény egyenlő valószínűségű, akkor hány pontja van a gráfnak?

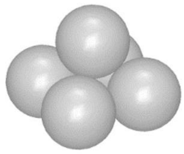
7. Egy társasjátékban a játékosok egyforma méretű golyókból négy rétegű piramist építenek *(ábra)*. A piramist 12 + 22 + 32 + 42 = 30 golyó alkotja, amelyek közül 15 sötét, a többi 15 pedig világos.
A piramis építéséhez szükséges 30 golyót először kikészítik egy dobozba, majd az építés során a golyókat véletlenszerűen veszik ki a dobozból.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fölülről számított második rétegbe kerülő 4 golyó mindegyike sötét színű lesz?

Az *n* rétegű piramis $1^2 + 2^2 + ... + n^2$ darab golyóból áll ($n \in \mathbf{N}^+$).

b) Bizonyítsa be (például teljes indukcióval), hogy $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

A kétrétegű piramis 5 golyóból áll *(ábra)*. Az alsó réteget alkotó 4 golyót egy vízszintes síklapon helyezzük el úgy, hogy az egymás melletti golyók érintsék egymást, középpontjaik pedig egy négyzet csúcsai legyenek. A golyók sugara 1 cm.



c) Számítsa ki a kétrétegű piramis magasságát!

8. Egy élelmiszergyártó kisüzem levesporkészítő részlegében 700 kg levespor van raktáron. A raktárkészlet csökkentése érdekében az eladással foglalkozó vezető azt tervezi, hogy minden hónapban először (eladással, jótékony célú ajándékozással) 24%-kal csökkentik az aktuális raktárkészletet, ezután a készletet megnövelik a havonta előállított 60 kg levesporral (így például az első hónap végén 592 kg levespor lesz raktáron).

a) Ha sikerül a terv megvalósítása, akkor összesen hány kg levesport adnak/ajándékoznak el 18 hónap alatt?

b) Igazolja, hogy a tervezett módszert 18 hónapon túl (gondolatban akár végtelen sokáig) is alkalmazva a raktárkészlet minden hónapban csökken ugyan, de soha nem csökken 250 kg alá!

9. Az 1917-ben gyártott és nosztalgiajárműként megőrzött 109.109 sorozatszámú gőzmozdony legnagyobb, úgynevezett hajtókerekének átmérője 1740 mm. A mozdony maximális engedélyezett sebessége 90 km/h.

a) Mekkora a hajtókerék percenkénti fordulatszáma 90 km/h sebességnél?

Több próbaút során is vizsgálták, hogy a mozdony szénfogyasztása hogyan függ a mozdony átlagsebességétől. A mérések szerint *v* km/h átlagsebesség esetén ($50 < v < 100$) jó közelítéssel $0{,}5v^2 - 65v + 3800$ kg volt az óránkénti szénfogyasztás. A mozdony a hozzákapcsolt szerkocsiban 6,1 tonna szenet tud magával vinni.

b) Számítsa ki, hogy 60 km/h átlagsebesség esetén (a megadott modell szerint) hány km hosszúságú útra elegendő a 6,1 tonna szénkészlet!

c) Határozza meg azt az átlagsebességet, amelynél a 6,1 tonna szén a lehető leghosszabb útra elegendő!

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	3a	3b	3c	3d	4a	4b	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	9a	9b	9c
7	5	7	6	3	4	3	2	7	7	5	5	6	4	3	9	4	6	6	9	7	4	3	9