I.

1. Adott két függvény:
$f:]\,0;130\,[\to \mathbf{R};\quad f(x) = 900 - 0{,}25(x-60)^2$, illetve $g:]\,0;130\,[\to \mathbf{R};\quad g(x) = 6{,}4x$.

a) Adja meg az f zérushelyét!

b) Számítsa ki az $f(20) - g(20)$ különbség értékét!

c) Adja meg a $h:]\,0;130\,[\to \mathbf{R};\quad h(x) = f(x) - g(x)$ függvény szélsőértékét (típusát, helyét és értékét)!

2. Egy továbbképzésen részt vevő csoport tagjai életkorának átlaga 28 év. Az öt legidősebb résztvevő életkorának átlaga 40 év, a többieké 25,6 év.

a) Hány nő és hány férfi vesz részt a továbbképzésen, ha 1,5-szer annyi nő van a csoportban, mint férfi?

A csoport tagjai az egyik napon „keleties” ebédet kaptak. Az ételek ízesítéséhez hatféle fűszer állt rendelkezésükre: keserű, savanyú, édes, sós, csípős és fanyar.

b) Hányféleképpen ízesíthetik az ételeiket a résztvevők úgy, hogy a hatból három- vagy négyféle fűszert használhatnak, de az édes és a keserű nem szerepelhet egyszerre?

3. Van néhány dobozunk és valahány érménk. Ha minden dobozba egy érmét teszünk, akkor m darab érme kimarad. Ha minden dobozba pontosan m db érmét akarunk tenni, akkor m dobozba nem jut érme ($m \neq 1$).

a) Hány érménk lehet, ha a dobozok száma 6?

Egy dobozban több ezer érme van, amelyek 3%-a hibás. Az érmék közül véletlenszerűen kiválasztunk 80-at. (Az érmék nagy száma és az alacsony hibaszázalék miatt a kiválasztás visszatevéses mintavétellel is modellezhető.)

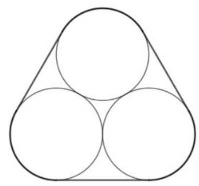
b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 hibás érme lesz a kiválasztott érmék között?

4. Ha András az asztalra ejti a pingponglabdáját, akkor a labda az ejtési magasság kb. 84%-ára pattan vissza. Ezután tovább pattog úgy, hogy minden asztalra érkezés után az előző felpattanás magasságának 84%-áig emelkedik fel.

a) András egy alkalommal (az asztal lapjától mérve) 1 méter magasságból ejtette az asztalra a pingponglabdát. Mekkora utat tesz meg összesen a pingponglabda az első asztalra érkezésétől a tizenötödikig? (Feltételezzük, hogy a labda csak függőleges irányban mozog, a vízszintes irányú elmozdulása elhanyagolható.)

András azt állítja, hogy az összes pingponglabdájának száma 6-tal osztva 2 maradékot, 15-tel osztva pedig 1 maradékot ad.

b) Mutassa meg, hogy András állítása hamis!



Dóri olyan pingponglabda-készletet vásárolt, amelynek dobozába három egyforma labda – az ábrán látható elrendezésben – szorosan belefér. A doboz hengeres test, melynek alaplapját három egybevágó körív és három egyenlő hosszúságú szakasz határolja. (Az ábrán a dobozt felülnézetből látjuk.)

c) A doboz térfogatának hány százalékát tölti ki a három pingponglabda, ha a labdák átmérője 40 mm? (A doboz falvastagsága elhanyagolható.)

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:
$f(x) = (x+4)(2-x)$
$g(x) = x + 4$
$h(x) = x^2 - 4$
$i(x) = |x| - 4$

a) Határozza meg az f és g függvények grafikonja által közre zárt korlátos síkidom területét!

Egy négypontú gráf csúcsait megfeleltetjük e négy függvénynek. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a két megfelelő függvénynek van közös zérushelye.

b) Rajzolja fel az így kapott gráfot!

A valós számok halmazán értelmezett k függvény zérushelyei –5 és 3, az m függvény zérushelyei 3 és –3, az n függvény zérushelyei pedig 5 és –5.
A p elsőfokú függvény hozzárendelési szabálya $p(x) = x + c$, ahol c egy valós szám.

c) Hányféleképpen választható meg a c konstans értéke úgy, hogy a k, m, n és p függvényekre a **b)** feladatban megadott szabály szerint elkészített négypontú gráf fagráf legyen?

6. Egyes kutatók szerint a városokban az influenzával fertőzött betegek száma a $B(t) = \dfrac{L}{1+\left(\dfrac{L}{B_0}-1\right)\cdot 0{,}75^t}$ formula szerint alakul. A képletben t az influenzajárvány kezdetétől eltelt idő napokban kifejezve ($0 \le t < 30$), L a város lakosainak száma, B_0 pedig a járvány kezdetekor a fertőzött betegek száma a városban ($0 < B_0 < L$).
Egy nagyvárosban L = 1,5 millió, $B_0 = 1000$.

a) A modell szerint hány fertőzött betegre lehet számítani ebben a városban a járvány kezdete után 5 nappal?

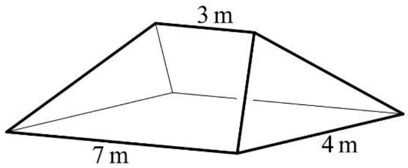
b) Hány nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött beteg a modell szerint?

c) Igazolja, hogy ha L és K adott pozitív számok, $n \in \mathbf{N}^+$, akkor a $b_n = \dfrac{L}{1+K\cdot 0{,}75^n}$ képlettel megadott sorozat korlátos, szigorúan monoton növekedő, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

7. Ádám balatoni telkén áll egy kis hétvégi ház. A ház felülnézete egy 7 m × 4 m-es téglalap. Ha esik az eső, akkor a tetőre lehulló csapadékot a tető négy oldalán körbefutó ereszcsatornák gyűjtik össze és vezetik be négy nagy, kezdetben üres (fedett) hordóba. A hordók forgáshenger alakúak, belső átmérőjük 40 cm, magasságuk 90 cm.
Egy nyári zivatar alkalmával 15 mm csapadék hullott a településen (ez azt jelenti, hogy minden vízszintes felületen 15 mm magasan állna az esővíz, ha nem szivárogna el). A zivatar közben a tetőre lehullott csapadék 95%-a összegyűlt a hordókban.

a) A zivatar után mindegyik hordóban ugyanolyan magasan állt a víz. Mekkora ez a magasság?

A ház cserépteteje elöregedett, cserélni kell. A tető felülete négy síkidomból áll. A háztető 7 méteres oldalaihoz két egybevágó húrtrapéz csatlakozik, amelyek síkja a vízszintessel egyaránt 30 fokos szöget zár be. A trapézok egymáshoz csatlakozó, rövidebb oldala 3 méter hosszú. A háztető 4 méteres oldalaihoz két egybevágó, egyenlő szárú háromszög csatlakozik.



b) Hány darab cserepet kell vásárolnia Ádámnak a tető újracserepezéséhez, ha a tetőfelület egy négyzetméterére 30 darabra van szükség, és a megvásárolt mennyiség 8%-a hulladék lesz?

8. Legyen az alaphalmaz a háromjegyű pozitív egész számok halmaza. Az A halmaz elemei azok a háromjegyű számok, amelyekben van 1-es, a B halmaz elemei azok, amelyekben van 2-es, a C halmaz elemei pedig azok, amelyekben van 3-as számjegy.

a) Hány eleme van az $A \setminus (B \cap C)$ halmaznak?

Egy szerepjátékhoz használt dobókocka három lapján 3-as, két lapján 2-es, egy lapján 1-es szám van. A feldobott kocka mindegyik lapjára egyforma valószínűséggel esik.

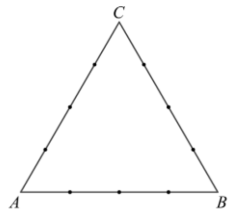
b) Két ilyen dobókockával egyszerre dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 4 lesz?

Andi és Béla a következő játékot játsszák ezzel a dobókockával. Valamelyikük dob egyet a kockával. Ha a dobás eredménye 3, akkor Andi fizet Bélának n forintot ($n > 80$); ha a dobás eredménye 1, akkor

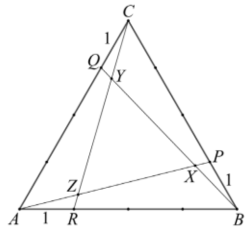
Béla fizet (n – 80) forintot Andinak; ha pedig a dobás eredménye 2, akkor is Béla fizet Andinak 2·(n – 80) forintot.

c) Mennyit fizet Béla Andinak az 1-es dobása esetén, ha ez a játék igazságos, azaz mindkét játékos nyereményének várható értéke 0?

9. Az ABC szabályos háromszög mindhárom oldalát 3-3 osztóponttal négy egyenlő részre osztottuk.



a) Hány olyan négyszög van, melynek mind a négy csúcsa a háromszög oldalain kijelölt 9 pont közül való úgy, hogy a négyszögnek a háromszög mindegyik oldalán van legalább egy csúcsa?
(Két négyszöget különbözőnek tekintünk, ha legalább egy csúcsukban különböznek.)



Jelölje a 4 egység oldalú ABC szabályos háromszög BC oldalának B-hez közelebbi negyedelőpontját P, a CA oldal C-hez közelebbi negyedelőpontját Q, az AB oldal A-hoz közelebbi negyedelőpontját pedig R. Jelölje továbbá AP és BQ szakaszok metszéspontját X, BQ és CR szakaszok metszéspontját Y, végül CR és AP szakaszok metszéspontját Z.

b) Határozza meg az XYZ háromszög területét!

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	8a	8b	8c	9a	9b
4	3	6	7	6	6	5		4	3	7	7	4	5	3	6	7	5	11	5	5	6	5	11