I. 1968

1. a) Igazolja, hogy bármely hat egymást követő természetes szám szorzata osztható 45-tel!

b) Igaz-e, hogy bármely öt egymást követő **páratlan** természetes szám szorzata osztható 45-tel? (Válaszát indokolja!)

c) Hány olyan megoldása van a $45 = 3 + 5 + a + b + c$ egyenletnek, amelyben a, b és c különböző **páratlan** természetes számok, és $5 < a < b < c$ is teljesül?

d) Határozza meg az $(A \vee B) \rightarrow C$ állítás logikai értékét az A, B és C kijelentések különböző lehetséges logikai értékei esetén, és töltse ki ennek megfelelően a jobbra levő igazságtáblázatot! (Válaszait **itt** nem szükséges indokolnia.)

A	B	C	$(A \vee B) \rightarrow C$
i	i	i	
i	i	h	
i	h	i	
i	h	h	
h	i	i	
h	i	h	
h	h	i	
h	h	h	

2. A Budavári Siklót 1870-ben építették. Korabeli források szerint a sikló (hegyoldali vasútvonal) kivitelezője, Wohlfarth Henrik a pálya eredeti tervekben szereplő kb. 33 fokos hajlásszögét – ma már nem tudni, milyen okból – 30 fokra csökkentette. A kivitelezés során a felső állomás helye változatlan maradt, az alsó állomás azonban a tervekhez képest 6 méterrel feljebb került. (Az alsó állomás tervezett és valóságos helyét összekötő képzeletbeli egyenes merőleges a földfelszínre.)

a) Határozza meg a sikló pályájának hosszát és a pálya szintemelkedését!

A feljegyzések szerint a millennium évében, 1896-ban a sikló összesen 670 ezer utast szállított. Tételezzük fel, hogy a sikló egy napi üzemideje 14 óra volt, s kéthetente egy napra karbantartás céljából leállították a közlekedését, azaz megközelítőleg 340 napot üzemelt az év során. A menetek közti átlagos követési időköz 10 perc volt.
Akkoriban egy-egy kocsi egyszerre 22 utast szállíthatott. A pályán összesen két kocsi közlekedik: egy menetben az egyik felfelé, a másik lefelé halad ugyanabban az időben.

b) A megadott adatok alapján számítsa ki, hogy kb. hány százalékos volt a férőhelyek átlagos kihasználtsága 1896-ban!

3. Egy egyetemi előadáson 32-en ülnek a kisteremben. Ha négy lány távozna, akkor a jelenlévők több mint 60%-a fiú lenne. Ha azonban a 32 főhöz további hat lány csatlakozna, akkor a jelenlévők több mint fele lenne lány.

a) Hány fiú és hány lány lehet jelen az előadáson?

Az egyetem több ezer hallgatójának 60%-a fiú, 40%-a lány. (Ezt tekinthetjük úgy, hogy 0,6 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott hallgató fiú, és 0,4 annak a valószínűsége, hogy lány.)

b) Ha az egyetem büféjében egy asztalhoz véletlenszerűen ül le négy hallgató, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy több fiú van közöttük, mint lány?

Ha három lányhallgató találkozik véletlenszerűen, akkor 0,008 annak a valószínűsége, hogy mindegyikük rendszeresen sportol.

c) A lányok hányadrésze sportol rendszeresen?

4. Adott az $x^2 - 4y = 0$ egyenletű parabola és az $x - y = 5$ egyenletű g egyenes.

a) Igazolja, hogy a parabola fókuszpontja az $F(0; 1)$ pont!

b) Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a g egyenesen van, valamint átmegy a $P(0; -1)$ ponton és a parabola F fókuszpontján is!

c) Adja meg a parabola g egyenessel párhuzamos érintőjének egyenletét!

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Kovács úr új autót vásárolt 5 millió forintért. Egy matematikai modell szerint az autó egy év alatt elveszíti az aktuális értékének 12%-át.

a) Ha csak az értékvesztést vesszük figyelembe, akkor hány teljes év elteltével ér 1,5 millió forintnál kevesebbet Kovács úr autója?

A Precíz Kft. havi amortizációval (értékvesztéssel) számolja ki a gépjármű aktuális értékét. (Havi amortizáció: az autó értéke minden hónapban az előző havi értékének ugyanakkora százalékával csökken.)

b) Mutassa meg, hogy ha az éves értékvesztés 12%-os, akkor a havi amortizáció megközelítőleg 1,06%-os!

Kovács úr szeretné eladni törésmentes és jó állapotú autóját a Precíz Kft.-nek. A Kft. szórólapján az áll, hogy kétféleképpen is kiszámítják az autó aktuális értékét, és az eladó számára kedvezőbb árat garantálják.
I. módszer: a jelenlegi akciójukban 12 hónapot levonnak az autó valós életkorából, majd 1,06%-os havi amortizációval számolják ki az autó értékét.
II. módszer: az autó által megtett kilométerek alapján számítják ki az autó „életkorát” úgy, hogy évente átlagosan 15 000 km-es megtett utat feltételeznek; ebben az esetben azonban 1,2%-os havi amortizációval számolnak (az 1,06% helyett), és nincsen 12 hónap kedvezmény.

c) Melyik számítási módszer a kedvezőbb Kovács úr számára, ha az autója 8 éves 5 hónapos, és az autó eddig 91 250 km utat tett meg?

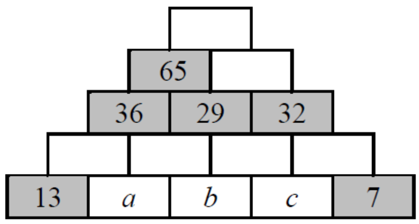
6. a) Egy szabályos dobókockával hatszor dobtunk. A dobott számok egyetlen módusza, a mediánja és az átlaga – ebben a sorrendben – egy szigorúan monoton növekvő számtani sorozat három szomszédos tagja.
Adjon meg egy megfelelő dobássorozatot, és igazolja, hogy a megadott dobássorozat a feltételeknek megfelel! Igaz-e, hogy a megadott hat szám szórása is tagja ugyanennek a számtani sorozatnak?

b) Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a másodiknak dobott szám éppen a másik két dobott szám átlaga?

7. a) Egy tömör fából készült forgáshenger magassága 30 cm, felszíne 10 000 cm^2. A hengerből egy olyan forgáskúpot készítenek, amelynek az alapköre és a magassága megegyezik a hengerével.
A henger térfogatának hány százaléka lesz forgács, és mekkora a kúp térfogata?

b) Határozza meg a 10 000 cm^2 felszínű forgáshengerek közül a legnagyobb térfogatú henger alapkörének a sugarát és a henger magasságát!

8. A rejtvényújságok egyik kedvelt feladattípusa a *számpiramis*. Az előírás szerint a számpiramis üres mezőibe pozitív egész számokat kell írni úgy, hogy az egymás mellé kerülő számok összege megegyezzen a föléjük írt számmal.
Az ábrán látható számpiramisban a 13, 7, 36, 29, 32 és a 65 kezdőszámok adottak.



a) Számítsa ki *a*, *b* és *c* értékét!

1852-ben egy londoni diák az Anglia megyéit ábrázoló térkép színezése közben úgy találta, hogy a megyék „helyes” színezéséhez legfeljebb négy színre van szükség. (Helyes színezés esetén a közös határszakasszal rendelkező megyék különböző színűek.) A diák sejtésének általánosítása tetszőleges térképek esetére (négyszín-tétel) sokáig megoldatlan matematikai probléma volt.
A térképrészleten Tolna megye és négy megyeszomszédja látható. Az öt megyét legfeljebb négy színnel színezzük ki (piros, sárga, kék és zöld).

b) Hányféleképpen színezhető helyesen ez a térképrészlet? (Két színezés különböző, ha van legalább egy megye, melynek a két színezésben más a színe.)

9. a) Igazolja, hogy $\frac{2}{(n+1)^2-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$.

b) Számítsa ki az $a_n=\frac{2}{(n+1)^2-1}$ sorozat első négy tagjának az összegét!

Válaszát $\frac{a}{b}$ alakban adja meg, ahol a és b relatív prím pozitív egész számok!

c) Határozza meg a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ határértéket!

Pontszámok:

1a	1b	1c	1d	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	7a	7b	8a	8b	9a	9b	9c
3	3	4	3	7	5	6	4	3	3	5	5	5	4	7	8	8	7	9	9	7	3	3	10