I.

1. a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\left(2^x - 3\right)^2 = 2^{x+1} + 9$$

Legyen $f(x) = x^2 - 9x + 14$, ahol x valós szám.
Tekintsük a következő állítást: „Ha $x > 7$, akkor $f(x) > 0$.”

b) Adja meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Igaz-e az állítás megfordítása? Válaszát indokolja!

2. Margiték autójában a fedélzeti számítógép kiszámítja, hogy az autó üzemanyagtartályában lévő benzin még hány kilométer megtételéhez elegendő. Nevezzük ezt *hátralévő távolság*nak. A számításhoz a gép a legutolsó tankolás óta mért átlagos fogyasztást veszi alapul, és úgy számol, hogy az autó a jövőben is ezzel az átlagfogyasztással fog haladni. A legutóbbi tankolás alkalmával teletöltötték az autó üzemanyagtartályát, így 45 liter benzin volt benne. A tankolás óta éppen 200 kilométert tettek meg a városban, ekkor az autó átlagfogyasztása 10 liter volt 100 kilométerenként.

a) Számítsa ki a városi autózás után a *hátralévő távolság*ot!

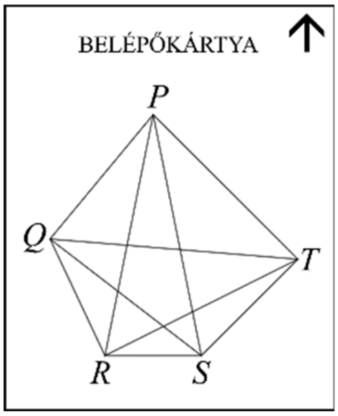
A 200 kilométeres városi autóhasználatot követően Margiték egynapos autós kirándulást tettek vidéken, ezalatt összesen 100 kilométert autóztak (újabb tankolás nélkül). A kirándulás végén a kijelző alapján 200 kilométerre elegendő benzin maradt, azaz ennyi lett a *hátralévő távolság*.

b) Mennyi volt az autó 100 km-re vonatkozó átlagfogyasztása a kirándulás során?

3. a) Hány olyan pozitív háromjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely a 8 és a 9 számok közül legalább az egyikkel osztható?

b) A 8-as számrendszerben háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott szám a 9-es számrendszerben is háromjegyű?

4. Egy többnapos nemzetközi matematikakonferencia minden résztvevője belépőkártyát kap, amelyen a *PQRST* konvex ötszög és annak átlói láthatók. A szervezők úgy tervezik, hogy egy-egy belépőkártyán az ötszög oldalai és átlói közül valahányat (egyet vagy többet, akár az összeset, de az is lehet, hogy egyet sem) megvastagítanak, így a különböző személyek különböző ábrájú kártyát kapnak. Az elektronikus kapu optikai leolvasója ez alapján engedélyezi a belépést, és elvégzi a személy regisztrációját. (Két belépőkártya különböző, ha az egyiken szerepel olyan megvastagított szakasz, amelyik a másikon nem.) A konferenciának 400 résztvevője lesz.



a) Jut-e mindenkinek különböző belépőkártya?

A konferencia épülete egy háromszög alakú területen van. Ha a háromszög csúcsai *A, B* és *C,* akkor $AB = AC = 130$ méter, és $BC = 100$ méter. A háromszög alakú területet kettéosztja az egyenes *CD* kerítés úgy, hogy a *BCD* háromszög alakú rész területe 2000 m^2. (*D* az *AB* oldalon van.)

b) Milyen hosszú a *CD* kerítés?

A konferencián 200 magyar, 70 angol és 130 német matematikus vesz részt. Az angolok életkorának átlaga 44 év, a németeké 48 év, az összes résztvevő életkorának átlaga 45,7 év.

c) Mennyi a magyar résztvevők életkorának átlaga?

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Tekintsük az (a_n) sorozatot: $a_1 = \binom{2}{2} = 1$, $a_2 = \binom{3}{2} = 3$, $a_3 = \binom{4}{2} = 6$, és így tovább,

$a_n = \binom{n+1}{2}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$.

a) Számítsa ki az (a_n) sorozat első öt tagjából álló számsokaság átlagát és szórását!

b) A fenti (a_n) sorozatból képezzük a (b_n) sorozatot: $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Mennyi a (b_n) sorozat határértéke?

A (c_n) számtani sorozat differenciája 0,25. A sorozat első n tagjának összege 100, első $2n$ tagjának összege 300 $(n \in \mathbf{N}^+)$.

c) Határozza meg n értékét!

6. Az ókori egyiptomiak az egyenlő szárú háromszög területét (közelítő módszerrel) úgy számolták ki, hogy az alap és a szár szorzatának a felét vették.[1]

a) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm hosszú. Mekkora lehet a szára, ha az ókori egyiptomiak módszere e háromszög valódi területét 25%-nál kisebb hibával adja meg?

Az ókori Egyiptom matematikájában a számok négyzetének is jelentős szerep jutott.

b) Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amellyel az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ számot megszorozva négyzetszámot kapunk?

[1] Forrás: *Dr. Lévárdi László – Sain Márton: Matematikatörténeti feladatok, Budapest, Tankönyvkiadó, 1982.*

7. A statisztikai értékelések során szükség van az adatokat és összefüggéseket szemléltető pontok és egyenesek kölcsönös helyzetének jellemzésére. Egy ilyen jellemző lehet a pontnak egy megadott egyenestől mért *függőleges távolsága*.
Az ábrán látható P_1, P_2, P_3, P_4 pontok esetén a függőleges távolságok rendre a d_1, d_2, d_3, d_4 szakaszok hosszával egyenlők. (A távolságokat megadó szakaszok párhuzamosak az y tengellyel.)

a) Határozza meg az $R(4; 2)$ és az $S(4; 5)$ pontok *függőleges távolságát* az $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ egyenestől!

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az adatokat pontokkal jelenítjük meg, és különböző egyeneseket veszünk fel, akkor mindegyik egyeneshez kiszámítható a pontok függőleges távolságainak **négyzetösszege** (az ábrán látható példában $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$).
Tekintsük azt az egyenest a *pontokra legjobban illeszkedő egyenesnek*, amelyre ez a négyzetösszeg a lehető legkisebb.
Adott három pont a koordináta-rendszerben: $A(1; 3)$, $B(3; 5)$ és $C(4; 4)$.

b) Adja meg az m értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű (origón átmenő) egyenes a megadott módszer szerint a *legjobban illeszkedjen az A, B* és *C* pontokra! $(m \in \mathbf{R})$

Az $y = \frac{1}{3}(-2x^2 + 11x)$ egyenletű g görbe áthalad a megadott A és B pontokon, a h egyenes pedig az origón és a C ponton.

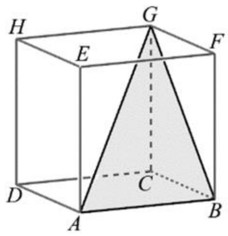
c) Mekkora a g és h által közbezárt korlátos alakzat területe?

8. Egy áruházláncban minden *Kocka* csokoládé vásárlásakor a csoki mellé ajándékba adnak egy „zsákbamacska” csomagot, amelyben egy kis fémkocka van. A fémkocka mindegyik lapja sárga vagy kék színűre van festve úgy, hogy mind a két színű lap előfordul.

a) Igazolja, hogy (színezés szerint) összesen 8-féle kocka van, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek!

b) Dórinak 7 különböző színezésű kockája van, így már csak egy hiányzik a teljes készlethez, hogy abból nyakláncot készítsen magának. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 3 darab *Kocka* csokoládét vesz, akkor meglesz a teljes készlete? (Feltételezhetjük, hogy mindegyik kockafajta ugyanakkora valószínűséggel fordul elő a csomagokban.)

Az ábrán látható *ABCDEFGH* kocka élhosszúsága 10 egység.

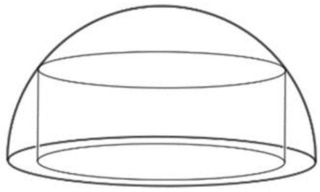


c) Számítsa ki az *ABG* háromszög beírt körének sugarát!

9. Két forgáshenger alakú viaszgyertyánk van. Az egyik gyertya alapkörének sugara r, magassága h, a másik alapkörének sugara R, magassága szintén h. A két gyertyát összeolvasztjuk, majd a viaszból egy ugyancsak h magasságú, forgáshenger alakú gyertyát öntünk ($r, h, R > 0$).

a) Igazolja, hogy az így kapott gyertya alapkörének sugara legalább $\sqrt{2rR}$. (Az öntés során fellépő anyagveszteségtől eltekinthetünk.)

Egy forgáshenger alakú tortát egy 15 cm sugarú, félgömb alakú védőbúra alatt helyezünk el. A torta a félgömb határoló körének síkján áll, és a torta fedőlapjának határoló köre a félgömbre illeszkedik (az ábra szerint).



b) Igazolja, hogy az m cm magasságú torta térfogata (köbcentiméterben mérve) $225\pi m - \pi m^3$. ($0 < m < 15$)

c) Igazolja, hogy a védőbúra alatt (a fent leírt módon) elhelyezhető maximális térfogatú torta térfogata kisebb, mint a félgömb térfogatának 60%-a!

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b	9c
7	4	3	3	6	7	7	3	7	4	4	4	8	9	7	3	6	7	6	4	6	5	4	7