I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $9^{x+1}+15\cdot 3^x=6$

b) $\frac{1}{4}\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{8}=0$

2. a) Egy **számtani** sorozat első tagja 5, differenciája 3, az első n tag összege pedig 4900.
Határozza meg n értékét!

b) Egy **mértani** sorozat első és második tagjának összege 6, harmadik és negyedik tagjának összege pedig 96. Adja meg a sorozat első tagját és hányadosát!

3. Egy társasházban 50-en laknak. A lakók 38%-a nő, 32%-a szemüveges.

a) Legalább, illetve legfeljebb hányan lehetnek a lakók között a nem szemüveges férfiak?

A társasház kertje egy 15 méter hosszú, 10 méter széles téglalap alakú földterület, amely az egyik átlója mentén ketté van osztva: az egyik fele füvesítve van, a másik felén virágágyás található. A füvesített rész derékszögű csúcsában van egy öntöző, amely egy 10 méter sugarú negyedkör alakú területet locsol a kertben.

b) Mekkora az a füvesített terület, amelyet nem ér el az öntöző?

4. Egy biliárdgolyó készletben található 9 golyó tömegére a következő mérési eredményeket kapták (grammban): 163, 163, 163, 163, 163, 164, 165, 166, 166.
Egy ilyen készletet akkor hitelesítenek a minőségellenőrzésen, ha az alábbi feltételek mindegyikének megfelel:
• minden golyó tömege legalább 160 gramm és legfeljebb 170 gramm;
• a golyók tömegének terjedelme legfeljebb 3 gramm;
• a golyók tömegének szórása legfeljebb 1 gramm.

a) Hitelesíthető-e ez a készlet?

Egy dobozban 3 piros és 7 kék golyó található.

b) Kihúzunk a dobozból egymás után **két** golyót úgy, hogy az elsőként kihúzott golyót a húzás után **nem tesszük vissza**. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a kihúzott két golyó között lesz piros!

c) Kihúzunk a 10 golyó közül egymás után **három** golyót úgy, hogy a kihúzott golyót a következő húzás előtt mindig **visszatesszük**. Legyen az A esemény az, hogy a kihúzott három golyó közül pontosan kettő piros, a B esemény pedig az, hogy a kihúzott golyók között van piros.
Határozza meg a $P(A \mid B)$ valószínűséget!

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Lali, Pali és Vali egy palacsintázóban ebédelnek. Lali 3 mogyorókrémes, 1 túrós és 2 fahéjas palacsintáért 1500 Ft-ot, Pali 4 mogyorókrémes, 2 túrós és 1 fahéjas palacsintáért 1740 Ft-ot, Vali pedig 1 mogyorókrémes, 2 túrós és 2 fahéjas palacsintáért 1170 Ft-ot fizetett.

a) Mennyibe kerül 1-1 darab a különböző fajta palacsintákból?

Lali vesz még egy lekváros palacsintát 210 Ft-ért. Lali zsebében 100, 50, 20, 10 és 5 Ft-os érmék vannak, mindegyikből több is. Ezek közül 6 érmét választ ki.

b) Igazolja, hogy 6 érmével három különböző módon fizethető ki 210 Ft! (Két fizetést különbözőnek tekintünk, ha legalább az egyik címletű érméből eltérő számút használunk fel a két fizetés során.)

c) Hányféle sorrendben vehet elő Lali 6 olyan érmét a zsebéből, amelyek összege 210 Ft, ha egyesével húzza elő őket? (Az azonos címletű érméket nem különböztetjük meg egymástól.)

6. Egy egyenlőszárú háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(0; 0)$, $B(82; 0)$ és $C(41; 71)$. Géza szerint ez a háromszög szabályos.

a) Határozza meg a háromszög szögeit fokban, három tizedesjegyre kerekítve!

b) Határozza meg a háromszög *AC* és *AB* oldalainak arányát négy tizedesjegyre kerekítve!

Egy csonkakúp alapkörének sugara 14 cm, fedőkörének sugara 8 cm, alkotója 10 cm hosszú. Géza szeretné gyorsan megbecsülni a csonkakúp térfogatát, ezért azt egy henger térfogatával közelíti. A közelítő henger alapkörének sugara megegyezik a csonkakúp alap- és fedőköre sugarának számtani közepével, magassága pedig egyenlő a csonkakúp magasságával.

c) Határozza meg Géza közelítésének relatív hibáját! (Relatív hibának nevezzük a közelítő értéknek a pontos értéktől mért százalékos eltérését.)

7. Flóra kétfajta lisztből süt kenyeret. A kenyérhez a recept alapján 5 : 4 arányban kell búzaliszt és rozsliszt. Eredetileg 450 gramm búzalisztet és 400 gramm rozslisztet kevert össze, de további, összesen 500 gramm liszt hozzáadásával sikerült elérnie a recept által előírt arányt.

a) A hozzáadott 500 gramm lisztből hány gramm volt a búzaliszt?

Ha egy cég x tonna lisztet állít elő egy nap alatt ($0 < x < 5$), és ezt a mennyiséget el is adja, akkor egy elemzés szerint a napi nyereség értékét az $n(x) = 0{,}8x^2(x-3)(1{,}5-x)$ képlet adja meg, a nyereséget tízezer tallérban számítva. (Negatív helyettesítési érték veszteséget jelent.)

b) Mutassa meg, hogy csak $1{,}5 < x < 3$ esetén nyereséges a napi termelés!

c) Hány tallér az elérhető legnagyobb napi nyereség, és ezt hány tonna liszt (előállítása és eladása) esetén érik el?

8. Egy baráti összejövetelen 7 fiú és 5 lány vett részt, találkozáskor mindenki üdvözölte a többieket. A fiúk kézfogással köszöntek egymásnak, két lány, illetve egy fiú és egy lány pedig öleléssel köszöntötte egymást.

a) Hány olyan találkozás volt, ahol öleléssel köszöntötték egymást?

Egy hatfős baráti társaság tagjai András, Bori, Csaba, Dóra, Ervin és Fanni bajnokságon döntik el, hogy ki a legjobb pingpongos közülük. Mindenki mindenki ellen egy mérkőzést játszik. Amikor 9 mérkőzést már lejátszottak, akkor kiderült, hogy mindegyikük páratlan számú mérkőzésen van túl. András az eddigi egyetlen meccsét Bori ellen játszotta, Csaba még nem játszott Ervin ellen.

b) Játszott-e már Dóra Fanni ellen?

András, Bori, Csaba és Dóra egy szabályos dobókockával dobnak egyet-egyet, és az nyer, aki a legnagyobb olyan számot dobta, amit a többiek nem dobtak (például 6, 6, 4, 1 dobások esetén a 4-est dobó játékos nyer). Ha nincs ilyen szám, akkor nem nyer senki. Bori 5-öst dobott, a többiek ezután fognak dobni.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy Bori nyer?

9. Adott az $x^2 + 2y = 16$ egyenletű parabola és az $x^2 + (y-3)^2 = 9$ egyenletű kör.

a) Határozza meg a parabola fókuszpontjának és a kör középpontjának a koordinátáit!

b) Igazolja, hogy a $Q(2\ 2; 4)$ pont a parabolának és a körnek is pontja, és a kör Q-ban húzott érintője érinti a parabolát is!

c) Határozza meg a parabola és az x tengely által közrezárt korlátos síkidom területét!

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b	9c
6	5	5	8	5	8	5	4	5	8	5	3	5	3	8	3	4	9	3	7	6	4	7	5