

I.

1. a) Egy szabályos dobókockával 7-szer dobunk, és a dobott számokat összeadjuk. Hány olyan különböző dobássorozat van, amelyben a hét dobott szám összege 9? (A dobott számok sorrendje is számít.)

b) Egy szabályos dobókockával 8-szor dobtunk. Az első hét dobás 2, 1, 3, 5, 4, 3, 5 volt.

Mi lehetett a nyolcadik dobás, ha tudjuk, hogy a nyolc dobás után a dobott számok átlaga nagyobb volt, mint a dobott számok mediánja?

c) Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a második dobás nagyobb lesz, mint az első?

2. a) Adottak az A , B , C kijelentések. Az A és B kijelentések logikai értéke igaz, a C kijelentés logikai értéke hamis.

Határozza meg az alábbi állítások logikai értékét! (Válaszait **itt** nem szükséges indokolnia.)

(1) $A \wedge C$

(2) $\neg A \vee B$

(3) $B \rightarrow C$

(4) $(A \wedge \neg B) \vee C$

Jelölje x és y a derékszögű koordináta-rendszer egy tetszőleges pontjának első, illetve második koordinátáját, és legyen c egy valós szám.

b) Igaz-e a következő állítás?

Ha $c \leq 12$, akkor $x^2 + 4x + y^2 - 6y + c = 0$ egy kör egyenlete. (Válaszát indokolja!)

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és a megfordított állításról is döntse el, hogy igaz vagy hamis! (Válaszát indokolja!)

3. Egy háromszög három oldalának hossza (valamilyen sorrendben) tekinthető egy mértani sorozat három szomszédos tagjának. Két oldal hosszát ismerjük, az egyik 12 cm, a másik 27 cm.

a) Milyen hosszú lehet a harmadik oldal?

Az ABC derékszögű háromszög befogóinak hossza $AC = 30$ egység és $BC = 40$ egység. Megrajzoljuk a derékszögű csúcspól induló magasságvonalat, szögfelezőt és súlyvonalat. Ezek metszéspontját az átfogóval jelölje rendre P , Q és R .

b) Írja fel egész számokkal az $AP : PQ : QR : RB$ arányt! Pontos értékekkel számoljon!

4. Különböző közlekedési ágazatok gazdaságosságát gyakran hasonlítják össze. Ennek részeként meghatározzák 1 személy 1 kilométer távolságra történő elszállításának üzemanyagköltségét. Egy Boeing 737-700 típusú utasszállító repülőgép átlagos üzemanyag-fogyasztása az 1200 km-es Budapest–Amszterdam repülési útvonalon kb. 2,4 tonna óránként. A gép átlagsebessége az úton kb. 750 km/h, a szállítható személyek száma 150 fő. A repülőgép üzemanyagának egységára 900 euró/tonna.

Egy személyautó üzemanyag-fogyasztása kb. 6 liter/100 km, a szállítható személyek száma 5 fő. A személyautó üzemanyagának egységára 1,2 euró/liter.

a) Tegyük fel, hogy a repülőgépen és a személyautóban is minden férőhely foglalt. Csak az üzemanyagköltséget tekintve a vizsgált repülőjárat vagy a személyautó szállít el olcsóbban 1 személyt 1 kilométer távolságra?

Az egyik repülőjárat fedélzetén szendvicset, üdítőt és kávékat lehet kapni. A szendvics ára 3,50 euró, az üdítő ára 3 euró, a kávé ára 2,50 euró. A szendviczből és üdítőből álló menü ára 5,50 euró.

Kávéból 28 adagot adtak el. Kétszer annyi szendvicset adtak el menüben, mint menü kívül, és 10-zel kevesebb üdítőt adtak el menüben, mint menü kívül. Az elszámolásnál kiderült, hogy az összes bevételnek éppen az egyharmada származott menü eladásából.

b) Határozza meg a fedélzeti eladásokból származó bevételt ezen a repülőjáraton!

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Egy háromszög oldalai a , $a + 1$ és $a + 2$ egység hosszúak.

a) Igazolja, hogy ha a háromszög legnagyobb szöge γ , akkor $\cos \gamma = \frac{a-3}{2a}$.

b) Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát, ha a háromszög legnagyobb szöge 120 fokos!

Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza 8 cm, 15 cm és 17 cm. A háromszöglemez egy pontját véletlenszerűen kiválasztjuk.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a pont mindegyik csúcstól legalább 3 cm távolságra lesz?

6. Egy gyárban olyan 5 liter űrtartalmú lábosokat készítenek, melyek alakja jó közelítéssel (felül nyitott) forgáshenger.

a) Mekkora az 5 literes lábos alapkörének a sugara, ha magassága 15 cm?

b) A lábosok külső felületét vékony, piros zománcréteggel vonják be. Mekkora legyen az 5 literes lábos alapkörének a sugara, hogy a külső felület bevonásához a lehető legkevesebb zománcot kelljen felhasználni?

Minden egyes elkészült termék (egymástól függetlenül) p valószínűséggel selejtes. Egy kamion több ezer lábost szállított a megrendelőnek, melyek közül a minőségellenőrök 20-at vizsgálnak meg a szállítmány átvétele előtt.

c) Legfeljebb mekkora lehet p értéke, ha legalább 0,8 annak a valószínűsége, hogy a 20 megvizsgált termék egyike sem selejtes?

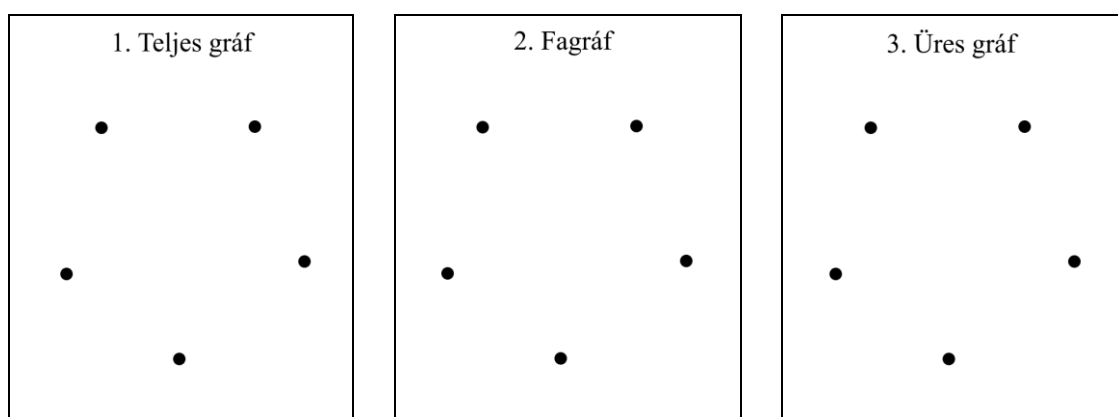
7. a) Két pozitív egész szám relatív prím, legkisebb közös többszörösük 35 700. Határozza meg az ilyen tulajdonságú számpárok számát! (Az (a, b) és (b, a) számpárokat nem tekintjük különbözőeknek.)

b) Legyen $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Hány olyan részhalmaza van H -nak, amelyben az elemek szorzata osztható 9-cel? (Egyelemű halmaz esetén az „elemek szorzatának” az egyetlen elem értékét tekintjük.)

c) Egy papírlapon adott öt pont. A pontok mellé egy-egy pozitív egész számot írunk. Az adott pontok legyenek egy olyan ötpontú egyszerű gráf csúcsai, amelynek két csúcsa pontosan akkor van éllel összekötve, ha a csúcsok mellé írt számok közül az egyik többszöröse a másiknak.

Az alábbi három ábra mindegyikén 5-5 pont látható. Írjon mindhárom ábrán az 5 pont mellé

különböző pozitív egész számokat, majd rajzolja meg a fenti szabály szerint a gráf éleit úgy, hogy az első esetben egy teljes gráfot, a második esetben egy fagráfot, a harmadik esetben pedig egy üres gráfot kapjon (az üres gráfnak egyetlen éle sincsen)!



8. A közúti forgalomban gyakran előfordul, hogy egy autónak hirtelen meg kell állnia. Száraz útviszonyok között jellemzően $7,5 \text{ m/s}^2$ egy autó lassulása.

Ebben az esetben a pillanatnyi sebességet a megtett út függvényében leíró összefüggés:

$v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot x}$, ahol x a fékezés megkezdésétől mért út hossza méterben, v_0 pedig a fékezés megkezdésekor az autó sebessége m/s-ban.

a) Egy autó (száraz útviszonyok között) 18 m/s sebességgel halad, amikor megkezd a fékezést. Meg tud-e állni az útra kigurult labda előtt, ha a labda ekkor 20 méter távolságra van tőle?

- b) Balesetek vizsgálatakor a szakértők a féknyom hosszából állapítják meg az autó sebességét, mellyel a fékezés megkezdésekor haladt. Egy autó (száraz útviszonyok között) a fékezés megkezdésétől kezdve a teljes megállásig 40 méteres féknyomot hagyott. Hány m/s volt az autó sebessége a fékezés megkezdésekor?

Az akadály észlelésétől az autó megállásáig megtett út a **féktávolság**. Ez két részből tevődik össze: **a sofőr reakcióideje alatt megtett útból** és a **fékútból**.

A sofőr reakcióideje az észlelés és a fékezés megkezdése között eltelt idő; ezalatt az autó változatlan sebességgel halad. A fékezés megkezdésétől az autó megállásáig megtett utat nevezzük fékútnak.

Havas, jeges úton $1,5 \text{ m/s}^2$ -re csökken a lassulás, ekkor a fékezés során a pillanatnyi sebességet leíró összefüggés alakja megváltozik: $v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot x}$.

- c) Tegyük fel, hogy egy sofőr reakcióideje 0,8 másodperc. Számítsa ki, hogy mekkora a száraz útviszonyok között 15 m/s (54 km/h) sebességgel haladó autó **féktávolsága!**

Havas-jeges úton haladva mekkora sebesség esetén lesz ugyanekkora a féktávolság?

9. a) Határozza meg az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvényben az a, b és c valós paraméterek értékét, ha a függvényről tudjuk az alábbiakat:

(1) $f(0) = 1$;

(2) $f(1) = 0$;

(3) $f'(2) = f''(1)$ (az f első deriváltjának $x = 2$ -ben vett értéke megegyezik az f második deriváltjának $x = 1$ -ben vett értékével).

- b) Igazolja, hogy az $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ és az $y = x^3 + 3$ egyenletű görbének két közös pontja van, és számítsa ki a görbék által közbezárt síkidom területét!

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b
4	6	4	3	4	3	5	8	7	7	6	3	7	3	8	5	5	5	6	4	3	9	10	6