

I.

1. Adott a $C(-6; -2)$ és a $P(-3; 2)$ pont.

a) Írja fel a C középpontú, P ponton átmenő k kör egyenletét!

b) Írja fel a k kör P pontra illeszkedő érintőegyenésének egyenletét!

A C és P pontokon áthaladó egyenes és a két koordinátatengely egy derékszögű háromszöget határoz meg.

c) Határozza meg a háromszög köré írható kör sugarának hosszát!

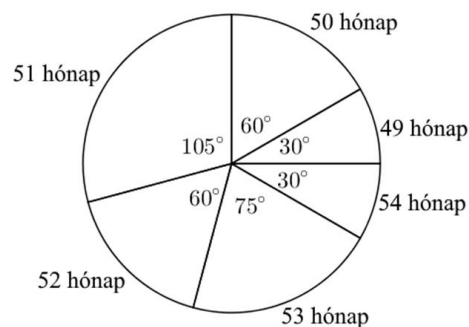
2. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin^2 x = 3 \cos^2 x$

b) $\log_3(x+8) + \log_3(x-2) - \log_3(x+4) = 1$

3. Egy napelemes akkumulátortöltőket gyártó cég termékei közül 24 darabnak az élettartamát vizsgálták. A vizsgálat végeredményét (a 24 darabra vonatkozóan) a jobbra levő kördiagram szemlélteti.

a) Töltse ki az alábbi táblázatot, és határozza meg a 24 darab töltő élettartamának átlagát és szórását!



élettartam (hónap)						
darabszám						

A részletesebb vizsgálatok szerint a cég által gyártott töltők 90 százaléka legalább 50 hónap élettartamú (ezt tekinthetjük úgy, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott töltő 0,9 valószínűséggel legalább 50 hónap élettartamú).

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy szakboltba kiszállított 20 darab töltő között legfeljebb kettő olyan található, amelynek az élettartama 50 hónapnál kevesebb?

Ismert az is, hogy 0,75 annak a valószínűsége, hogy öt darab véletlenszerűen kiválasztott töltő mindegyikének élettartama 55 hónapnál kevesebb.

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy darab véletlenszerűen kiválasztott töltő élettartama legalább 55 hónap?

4. Adott az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2$ függvény ($x \in \mathbf{R}$).

a) Igazolja, hogy mindkét függvény grafikonja áthalad az origón és $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ ponton!

b) Határozza meg a két függvény grafikonja által közbezárt síkidom területét, ha $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$!

Adott az $a_n = \frac{2 + 2\pi n}{n}$ sorozat ($n \in \mathbf{N}^+$).

c) Igazolja, hogy ez a sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos, és adja meg a sorozat határértékét!

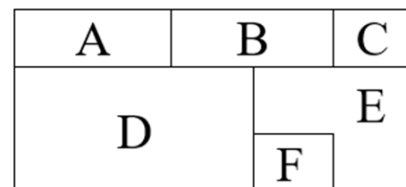
II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Egy téglalapot hat tartományra osztottak fel az ábrán látható módon. Az A, B, C, D, E, F tartományokat úgy kell kiszínezni, hogy azonos színű tartományok ne érintkezzenek egymással. A színezéshez a piros,

kék, zöld és sárga színek használhatók. (Mindegyik tartományt ki kell színezni a megadott színek egyikével, de nem kötelező mind a négy színt felhasználni.)

a) Hányféleképpen színezhető ki a téglalap úgy, hogy az A és C tartományok színe **különböző** legyen?



Az A, B, C, D, E és F nemnegatív számokról a következőket tudjuk:

- (1) $A = 6$ és $D = 8$;
- (2) B számtani közepe A-nak és C-nek;
- (3) F mértani közepe D-nek és E-nek;
- (4) F 1-gyel nagyobb B-nél;
- (5) E 2-vel nagyobb C-nél.

b) Határozza meg az ismeretlen számok értékét!

6. Egy ingatlanhirdetésben sík területen fekvő legelőt kínálnak eladásra. A legelő alakja konvex négyszög, ennek csúcsait jelölje A, B, C és D. A négyszög három oldala $AB = 126$ m, $BC = 65$ m, $CD = 80$ m, két szöge $\angle ABC = 122,5^\circ$ és $\angle ADC = 90^\circ$. A legelőt 0,9 hektár területűnek hirdeti az eladó.

a) Hány százalékkal nagyobb a legelő valódi területe a meghirdetettnél?

(1 ha = 10 000 m²)

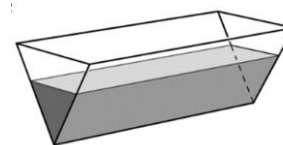
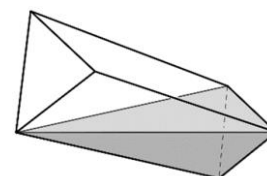
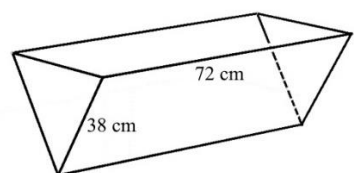
Egy itatóvályú alakja háromszög alapú egyenes hasáb. Vízszintes helyzetében a vályú felül nyitott, a hasábnak ez a lapja párhuzamos a vízszintes talaj síkjával, a háromszög alakú lapok pedig a talaj síkjára merőlegesek (ld. az ábrát). A szabályos háromszög alakú lemezek oldalai 38 cm hosszúak, a két téglalap alakú oldallap pedig 38 cm × 72 cm-es.

A vízszintes helyzetű vályú kezdetben tele van vízzel. A vályú egyik végét megemeljük, ezért a víz egy része kifolyik belőle. A vályúban ekkor a vízfelszín a bal oldali szabályos háromszög alsó csúcsától a jobb oldali szabályos háromszög felső éléig ér, ahogyan az ábra mutatja.

b) Igazolja, hogy ekkor a vályúban (egészre kerekítve) 15 liter víz van!

A vályút ezután visszafektetjük eredeti, vízszintes helyzetébe.

c) Hány cm magasan áll a víz a vályúban ekkor?



7. a) Az f függvény hozzárendelési szabálya $f(x) = 3^{-x}$ ($x \in \mathbf{R}$).

Helyezze el az alábbi halmazábra megfelelő részeibe az $f(-2)$, $f(0,5)$ és $f(5)$ függvényértékeket!

Egy ötpontú egyszerű gráf A, B, C, D, E pontjaihoz rendre a 3^{-2} , 3^{-7} , 3^{-12} , $1 - \sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ számokat írunk. A gráfban két

pont akkor és csak akkor van éllel összekötve, ha a két ponthoz írt számok **összege** racionális szám.

b) Hány éle van ennek az ötpontú gráfnak?

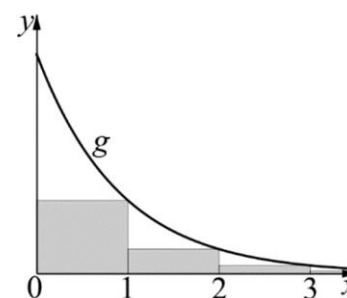
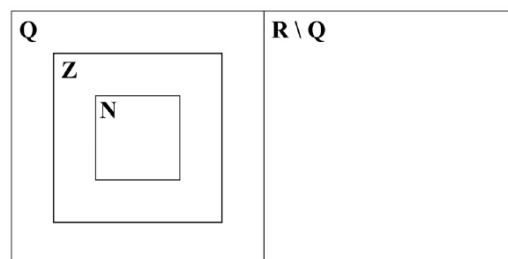
A koordinátatengelyek és a $g(x) = 3^{-x}$ ($x \geq 0$) függvény grafikonja által határolt tartományba olyan egymáshoz csatlakozó téglalapokat írunk, amelyek egyik oldala az x -tengelyen van és egységnyi hosszúságú, egyik csúcsa pedig a g függvény grafikonjára illeszkedik. Az első beírt téglalap egyik csúcsa az origó, ezzel szemközti csúcsa pedig az $(1; g(1))$ pont. A további téglalapok egy-egy csúcsa rendre $(2; g(2))$, $(3; g(3))$, és így tovább, az ábra szerint (az ábra nem méretarányos).

Legyen n az a legnagyobb pozitív egész szám, amelyre $g(n) - g(n+1) > 10^{-6}$ teljesül.

c) Számítsa ki az első n téglalap területének összegét!

8. Egy téglatest egyik éle 4 dm, egy másik éle 2 dm hosszú. A téglatest térfogata 72 dm³.

a) Határozza meg a téglatest felszínét!



Egy téglatest térfogata 72 dm^3 . A téglatest egyik éle kétszer olyan hosszú, mint egy másik éle.

b) Határozza meg az ilyen tulajdonságú téglatestek közül a minimális felszínű téglatest éleinek hosszát!

c) Hányféleképpen választhatunk ki egy téglatest csúcsai közül hármát úgy, hogy a kiválasztott három csúcs által meghatározott sík ne tartalmazza a téglatest egyetlen további csúcsát sem?

9. Egy jótékonyági rendezvényen sorsjegyeket árulnak. 5 kék és 3 zöld sorsjegy 6700 Ft-ba, 3 kék és 2 zöld sorsjegy 4200 Ft-ba kerül.

a) Mennyibe kerül külön-külön egy kék, illetve egy zöld sorsjegy?

A sorsjegyek 40%-a kék, 60%-a zöld. A különböző színű sorsjegyekhez tartozó nyeremények arányát mutatja a táblázat (például az **összes kék** sorsjegynek a 35%-a tárgynyereményt nyer).

	kék	zöld
tárgynyereményt nyer	35%	40%
1000 Ft-os könyvutalványt nyer	20%	30%
5000 Ft-os könyvutalványt nyer	5%	–
nem nyer	40%	30%

Véletlenszerűen kiválasztunk egy sorsjegyet. Legyen az A esemény az, hogy ez a sorsjegy tárgynyereményt nyer, a B esemény pedig az, hogy ez a sorsjegy kék.

b) Igazolja, hogy $P(A) = 0,38$.

Számítsa ki a $P(B | A)$ feltételes valószínűséget!

Függetlenek-e az A és B események?

c) Határozza meg az egy kék sorsjegyre eső nyeremény várható értékét, ha a tárgynyereményt 500 Ft-os értéken vesszük figyelembe!

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b	9c
2	3	6	6	8	5	5	3	3	5	5	7	9	6	5	5	3	5	8	2	8	6	5	8	3