

## I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a)  $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$

b)  $4 \sin^2 x - 16 \cos^2 x = -1$

2. Európában az autók üzemanyag-fogyasztását  $\frac{\text{liter}}{100 \text{ km}}$  mértékegységben szokás megadni.

(Például a  $8 \frac{\text{liter}}{100 \text{ km}}$  azt jelenti, hogy az autó 100 kilométerenként átlagosan 8 liter üzemanyagot fogyaszt.)

Az Egyesült Államokban viszont  $\frac{\text{mérőföld}}{\text{gallon}}$  mértékegységben adják meg a fogyasztást.

(Például a  $20 \frac{\text{mérőföld}}{\text{gallon}}$  azt jelenti, hogy 1 gallon üzemanyaggal átlagosan 20 mérőföldet tudunk megtenni.)

Az Egyesült Államokban a 2020-ban gyártott autók átlagfogyasztása  $25,4 \frac{\text{mérőföld}}{\text{gallon}}$  volt.

a) Fejezze ki ezt a fogyasztást  $\frac{\text{liter}}{100 \text{ km}}$ -ben! Válaszát 1 tizedesjegyre kerekítve adja meg!

(1 gallon  $\approx 3,79$  liter, és 1 mérőföld  $\approx 1,61$  km.)

A 2022. július 1-jétől Magyarországon kiadott gépjárműrendszámok formátuma a következő:



- Összetétele: 4 betű a latin ábécéből, majd 3 számjegy.  
(A latin ábécé 26 betűből áll, melyek közül 5 magánhangzó és 21 mássalhangzó.)
- Az első két betűből vagy mindkettő magánhangzó, vagy mindkettő mássalhangzó, de az első betűpár nem lehet CS, GY, LY, NY, SZ, TY, ZS.
- A harmadik és negyedik betű tetszőleges lehet.
- A három számjegy mindegyike tetszőleges lehet, de 000-ra nem végződhet rendszám.

b) Hány különböző, a fenti szabályok mindegyikének megfelelő rendszám készíthető?

c) Jelölje meg annak az állításnak a betűjelét, amely tagadása a következő állításnak:  
„Bármely két magyar rendszám különböző.”

- A) Minden magyar rendszám egyforma.  
B) Van pontosan két egyforma magyar rendszám.  
C) Van legalább két egyforma magyar rendszám.  
D) Nincs két egyforma magyar rendszám.

3. Az ábrán látható trapéz alakú kert alapjainak hossza:

$AB = 36 \text{ m}$ ,  $CD = 8 \text{ m}$ . A 11 méter hosszú  $AC$  átló merőleges a trapéz alapjaira.

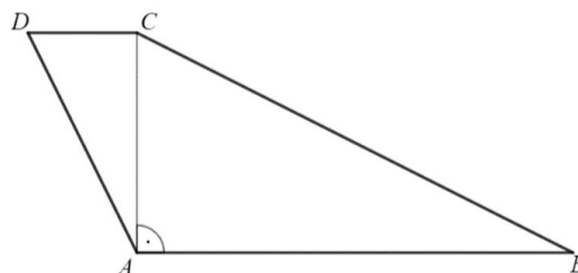
a) Mekkora a kert kerülete és területe?

A kert tulajdonosa egy 10 cm átmérőjű, henger alakú kutat fűratott a kertben.

b) Hány méter mély lett a kút, ha a térfogata 0,1 köbméter?

Az  $e$  egyenes párhuzamos a fenti  $ABCD$  trapéz alapjaival, és az  $AD$  szarat az  $E$  pontban, a  $BC$  szarat pedig az  $F$  pontban metszi. Az  $AC$  átló felezi az  $EF$  szakaszt.

c) Az  $A$  ponttól mekkora távolságra metszi az  $e$  egyenes az  $AC$  átlót?



4. Egy számtani sorozat 20. tagja 108. A sorozat első 20 tagjának összege 1115.

a) Számítsa ki a sorozat első tagját és differenciáját!

Egy mértani sorozat első tagja 3, és hányadosa is 3. A sorozat első  $n$  tagjának **szorzata**  $3^{435}$ .

b) Számítsa ki  $n$  értékét!

## II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Pali és a testvére, Lilla együtt szeretnének filmet nézni. Három film közül választanak: az egyik a *Kocka*, a másik *A kör*, a harmadik pedig a *Képlet* című film. Pali ezek közül az egyik filmnek 1 pontot, egy másiknak 2 pontot, a harmadiknak pedig 3 pontot ad, majd (Palitól függetlenül) ugyanezt teszi Lilla is. A két pontszámot mindegyik film esetében összeadják, majd a **legkisebb** pontösszegű filmet nézik meg. Ha több ilyen film is van, akkor filmnézés helyett társasjátékoznak.

a) Melyik filmet néznék meg a testvérek, ha az alábbi táblázat szerint adnák a pontjaikat?

	Pali	Lilla
1 pont	A kör	Képlet
2 pont	Kocka	A kör
3 pont	Képlet	Kocka

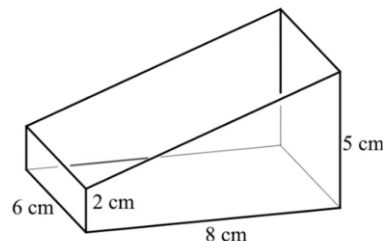
b) Hányféleképpen oszthatják ki a pontokat a testvérek úgy, hogy mindhárom film pontösszege ugyanannyi legyen?

c) Ha Pali és Lilla is véletlenszerűen osztja ki a pontszámokat a filmek között, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy filmnézés lesz a pontozás eredménye?

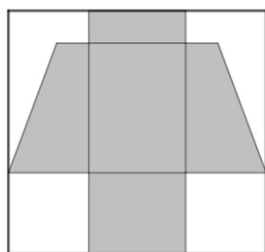
Egy filmes portálon a *Parabola* című filmet 83-an értékelték 1-10-ig egy-egy egész számmal. A film erősen megosztotta a nézőket: 46-an 1-essel értékelték azt, ugyanakkor a kapott értékelések átlaga pontosan 5 lett.

d) Számítsa ki a 83 értékelés szórását!

6. Egy felül nyitott doboz vízszintes asztallapon áll. A dobozt három téglalap és két derékszögű trapéz határolja. A doboznak a vízszintes síkra illeszkedő lapja  $8\text{ cm} \times 6\text{ cm}$  méretű, két egymással szemközti függőleges síkú lapja pedig  $6\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ , illetve  $6\text{ cm} \times 2\text{ cm}$  méretű téglalap.



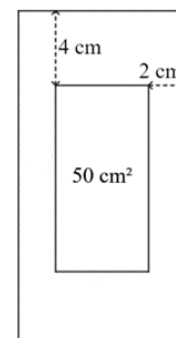
a) Számítsa ki a doboz testátlójának hosszát!



A test kiterített hálóját az ábra sötétített tartománya szemlélteti. Ezt a hálót egy  $15\text{ cm} \times 16\text{ cm}$ -es téglalaphoz vágjuk ki (ennek oldalai párhuzamosak a test  $8\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ -es alaplappjának oldalával).

b) Hány százalék hulladék keletkezik?

Egy téglalap alakú kartonlap oldalhosszait úgy szeretnénk megválasztani, hogy alul és felül 4-4 cm-es, jobb és bal oldalon 2-2 cm-es margót hagyva a lap közepén megmaradó téglalap alakú terület  $50\text{ cm}^2$  nagyságú legyen.



c) Mekkora legyen a kartonlap oldalainak hosszát, hogy a területe a lehető legkisebb legyen?

7. Egy gyár a beszállítójától 600 darab terméket rendelt. A gyár csak akkor veszi át a 600 darabot, ha egy **viSSZATEVÉS NÉLKÜLI** mintavétellel adódó 15 elemű mintában egyetlen hibás termék sincs.

a) Ha a 600 termék között 6 hibás van, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintavétel után a gyár átveszi a termékeket?

Egy cég reklámja szerint a termékeik legfeljebb 0,5%-a lehet hibás. A minőséget **visszatevéssel** előállított 15 elemű minta alapján ellenőrizték, amelyben 2-szer fordult elő hibás termék.

**b)** Tegyük fel, hogy a cég termékeinek pontosan 0,5%-a hibás!

Igazolja, hogy ekkor 1%-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a cég termékei közül visszatevéssel előállított 15 elemű mintában **legalább** 2-szer fordul elő hibás termék!

Egy szivattyúkat gyártó cég a selejtes termékeket visszavásárolja a forgalmazóktól, és a selejtraktárban tárolja. A selejtes termékek hibájuk alapján háromféle hibakódot kaphatnak. A törött termékek „**T**”, a hiányos termékek „**H**” és az egyéb hibával rendelkező termékek „**E**” kódot kapnak. Egy termék többféle hibakódot is kaphat a hibái alapján. A selejtraktárban az év végi nyilvántartás szerint a csak **T** kóddal, a csak **H** kóddal és a csak **E** kóddal rendelkező termékek darabszáma megegyezik. Olyan selejtes termék nincs, amelynek háromféle kódja is van. **T** kódja 35 terméknek, **H** kódja 40, **E** kódja pedig 45 terméknek van. Kétszer annyi terméknek van **T** és **E** kódja is, mint ahánynak **T** és **H** kódja is.

**c)** Hány selejtes termék van a selejtraktárban?

**8. a)** Legyen  $f: [1; \infty[ \rightarrow [1; \infty[$ ,  $x \mapsto 2x - 1$ , és  $g: [1; \infty[ \rightarrow [1; \infty[$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

Oldja meg az  $f(g(x)) = g(f(x))$  egyenletet!

**b)** Igazolja, hogy tetszőleges  $a < b$  paraméterek esetén  $\int_a^b (2x-1)dx = (b-a)(b+a-1)$

**c)** Határozza meg az  $a$  és  $b$  **egész** paraméterek lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy

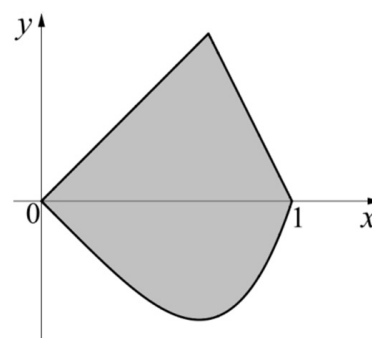
$$\int_a^b (2x-1)dx = 8 \quad (a < b).$$

**9.** Az ábrán egy medence méretarányos (kicsinyített) felülnézeti tervrajza látható. A medencét az  $y = x$  és az  $y = -2x + 2$  egyenletű egyenes, valamint az  $y = x^3 - x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) egyenletű görbe fogja közre.

**a)** Számítsa ki, hogy mekkora a tervezett medence alapterülete, ha a tervrajzon látható  $(0; 0)$  és  $(1; 0)$  pontok távolsága a valóságban 12 méter lesz!

Adott az  $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ ;  $f(x) = -x^3 + kx$  függvény ( $k$  valós paraméter). Az  $f$  függvény grafikonjához egy-egy érintőt húzunk az  $x = 1$ , illetve az  $x = 2$  abszcisszájú pontjában.

**b)** Igazolja, hogy a két érintő metszéspontjának első koordinátája ( $a$   $k$  paraméter értékétől függetlenül)  $\frac{14}{9}$ .



Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b
7	7	4	6	2	4	3	6	5	7	2	3	6	5	3	5	8	3	6	7	7	4	5	8	8