I.

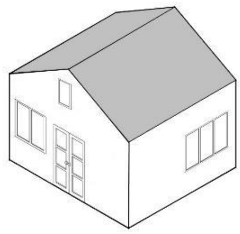
1. a) Oldja meg az egyenletet, ha *x* és *y* pozitív egész számok!

$$\frac{x}{8}=\frac{1{,}5}{y}$$

b) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

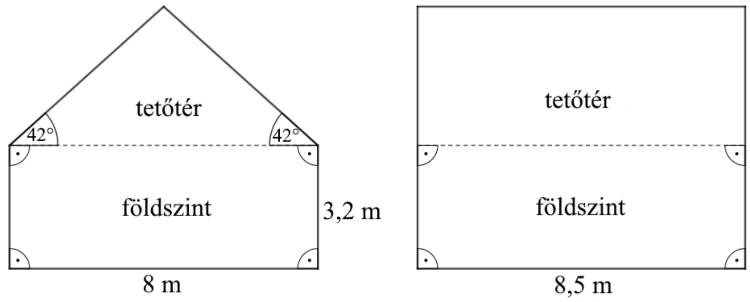
$$3\cdot 9^{x}-3^{x+3}=3^{x}-9$$

2. Egy családi ház egy téglatest alakú földszinti részből és a rá illeszkedő, háromoldalú egyenes hasáb alakú tetőtérből áll. A ház néhány méretét elölnézetben és oldalnézetben mutatja az alábbi ábra. (A fal-vastagságtól mindenütt eltekintünk.)



illusztráció

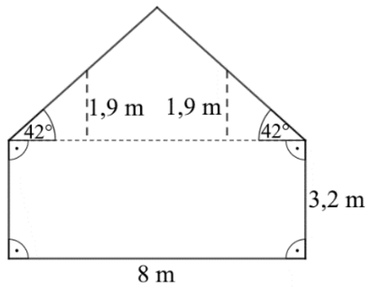
Az ábrán megadott méretek alapján számolva válaszoljon az alábbi kérdésekre!



a) A teljes tetőfelületet cseréppel fedik. Mekkora ez a felület? Válaszát m^2-ben, egészre kerekítve adja meg!

b) Hány köbméter a ház teljes térfogata (földszint és tetőtér összesen)?

A beépített tetőtér alapterületének csak az a része számít lakóterületnek, ahol a belmagasság legalább 1,9 méter.



c) Hány négyzetméter a ház teljes lakóterülete (a földszinti és tetőtérbeli lakóterület összesen)?

3. Tomi edzője mindegyik focimeccs után az 1-10-es skálán értékeli (egy-egy egész szám-mal) a játékosok teljesítményét. Az idei első hét mérkőzésen Tomi a következő értékelé-seket kapta: 6, 8, 6, 2, 8, 8, 6.

a) Számítsa ki az első hét értékelés átlagát és szórását!

Tomi következő három mérkőzése után kiderült, hogy az addigi tíz értékelésnek az átlaga 6,3, a terjedelme 8, és egyetlen módusza van.

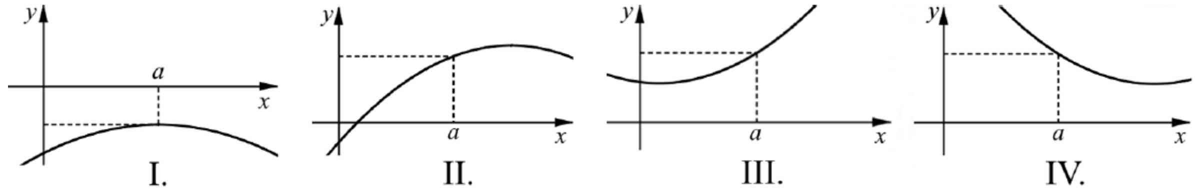
b) Határozza meg, hogy hányas értékeléseket kapott Tomi ezen a három mérkőzésen!

A 11. mérkőzésre kapott értékelés után Tomi átlaga a kapott értékelés tizedével csökkent az előző tíz mérkőzésének 6,3-es átlagához képest.

c) Hányas értékelést kapott Tomi a 11. mérkőzésen?

4. Adott a valós számok halmazán értelmezett másodfokú *f* függvény. Ismert, hogy egy adott $a \in \mathbf{R}$ helyen $f(a) > 0$, $f'(a) > 0$ és $f''(a) > 0$ mindegyike teljesül.

a) Az alábbi ábrákon négy másodfokú függvény grafikonja látható. Ezek alapján töltse ki a táblázat üres mezőit aszerint, hogy a megfelelő kijelentés *igaz* vagy *hamis*, majd döntse el, hogy a négy grafikon közül melyik lehet az *f* függvényé!
(Válaszait itt nem kell indokolnia.)



Függvény-grafikon	Az a helyen a függvényérték pozitív	Az a helyen az első derivált értéke pozitív	Az a helyen a második derivált értéke pozitív
I.		**HAMIS**	
II.			
III.			
IV.			

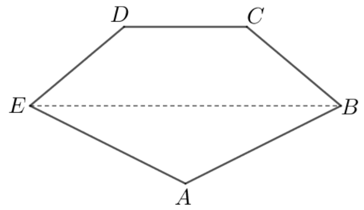
Az f függvény grafikonja a(z) …… grafikon lehet.

b) A másodfokú g függvény értékét az $x \in \mathbf{R}$ helyen a $g(x) = px^2 + qx + r$ összefüggés adja meg ($p, q, r \in \mathbf{R}, p \neq 0$).
Határozza meg p, q és r értékét úgy, hogy $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$ és $g''(1) = 4$ teljesüljön!

c) Számítsa ki $\int_{-3}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right)dx$ értékét!

II.

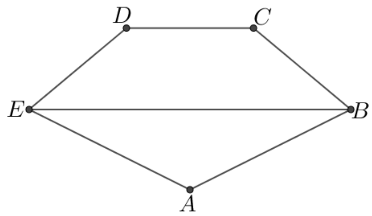
Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!



5. Az $ABCDE$ konvex ötszögben $AB = AE = 20$ cm és $BC = CD = DE$. A $BCDE$ négyszög egy húrtrapéz, amelynek a B-nél fekvő belső szöge 40°-os. Az A csúcs és az EB átló távolsága 10 cm.

a) Mekkorák az ötszög (belső) szögei?

b) Mekkora az ötszög területe?



c) Hányféleképpen járható be az ábrán látható $ABCDE$ ötpontú gráf, ha mindegyik élén pontosan egyszer kell végighaladnunk?
(A bejárás kezdőpontja a gráf egyik csúcsa; egy csúcsba érkezve csak olyan élen haladhatunk tovább, amely szintén az adott csúcsból indul.)

6. Egy hatfős baráti társaság, Attila, Boróka, Csaba, Dóra, Emil és Fanni három csapatot alkot. Mindhárom csapat 2 tagú, és mind a hatan pontosan egy csapatnak lesznek a tagjai.

a) Igazolja, hogy 15 különböző lehetőség van a három csapat kialakítására!
(Két lehetőség különböző, ha van olyan tag, akinek az egyik esetben más a csapattársa, mint a másikban.)

b) Ha véletlenszerűen (például sorsolással) hozzák létre a három csapatot, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom csapatba egy fiú és egy lány kerül?

Végül Attila Borókával, Csaba Dórával, Emil pedig Fannival került egy csapatba. A három csapat tagjai egyéni asztalitenisz-mérkőzéseket játszanak. Mindhárom csapat mindkét tagja egyszer játszik a másik két csapat mindkét tagjával. (Az egy csapatba tartozók nem játszanak egymás ellen.) Az egyes mérkőzéseket egymás után bonyolítják le. Az egyik mérkőzés után Attila megfigyelte, hogy a többi öt játékos mind különböző számú mérkőzést játszott eddig.

c) Hány mérkőzést játszott eddig Boróka?

7. Egy bizonyos fenyőfa (méterben mért) várható magasságának becslésére az alábbi képletet használják:

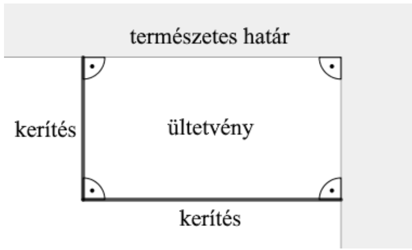
$$h(t) = \frac{30}{1 + 59 \cdot 0{,}905^t}$$ ahol t a megfigyelés kezdetétől eltelt idő években számítva.

a) Hány méter magas volt a fa a megfigyelés kezdetekor?

b) A megfigyelés kezdetétől számítva hány év múlva lesz a fa 10 méter magas?

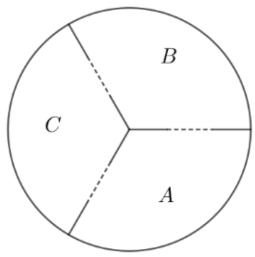
c) Számítsa ki az $\{a_n\}$ sorozat határértékét, ha $a_n = \dfrac{30}{1 + 59 \cdot 0{,}905^n}$

Különleges facsemeték neveléséhez egy téglalap alakú részt akarnak elkeríteni. A téglalap két szomszédos oldala természetes határokkal védhető, ezért csak a másik két oldalon kell kerítést építeni. A környezeti adottságok miatt a kerítés építési költsége a két oldalon különböző: az egyik oldalon 5 ezer Ft/m, a másik oldalon pedig 10 ezer Ft/m. A kerítés építésére összesen 400 ezer Ft áll rendelkezésre.



d) Hogyan kell megválasztani a két kerítésszakasz hosszát, hogy a rendelkezésre álló összegből a legnagyobb területű ültetvényt lehessen elkeríteni?

8. Egy számítógépes játékban egy kör alakú tartomány az ábra szerint három résztartományra van felosztva (*A*, *B*, *C*). Bármely két tartomány között egy átjáró van (az ábrán szaggatott vonallal jelölve).
A tartományok közötti átjárók mindegyike a többitől függetlenül p valószínűséggel van nyitva ($0 < p < 1$). Egyik tartományból a másikba csak nyitott átjárón (vagy átjárókon) keresztül lehet eljutni.
Legyen az E_0 esemény az, hogy az *A* tartományból nem lehet másik tartományba eljutni.



a) Mutassa meg, hogy az E_0 esemény valószínűsége $1 - 2p + p^2$.

b) Hogyan kell megválasztani a p értékét úgy, hogy az E_0 esemény valószínűsége legfeljebb 0,01 legyen?

Legyen az E_1 esemény az, hogy az *A* tartományból pontosan egy másik tartományba lehet eljutni, az E_2 esemény pedig az, hogy az *A* tartományból mindkét másik tartományba el lehet jutni (nem feltétlenül közvetlenül).

c) Igazolja, hogy az E_1 esemény valószínűsége $2p - 4p^2 + 2p^3$, az E_2 esemény valószínűsége pedig $3p^2 - 2p^3$.

d) Határozza meg a p valószínűség értékét úgy, hogy az E_1 esemény valószínűsége a lehető legnagyobb legyen, majd számítsa ki ekkor az E_1 esemény valószínűségét!

9. A 2, 4, 6, 8, 10 számok felhasználásával az összes lehetséges módon képezzük azokat a kéttényezős szorzatokat, amelyekben az első tényező kisebb, mint a második. Az így kapott szorzatokat összeadjuk.

a) Számítsa ki ezt az összeget!

Legyen k tetszőleges 1-nél nagyobb pozitív egész szám. Jelölje S_k azt az összeget, amelyet a következő eljárással kapunk: az 1, 2, 3, … , k számok (az első k db pozitív egész szám) felhasználásával az összes lehetséges módon képezzük azokat a kéttényezős szorzatokat, amelyekben az első tényező kisebb, mint a második, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

b) Igazolja, hogy $S_{k+1} = S_k + \dfrac{k(k+1)^2}{2}$

c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy tetszőleges 1-nél nagyobb n egész szám esetén $S_n = \dfrac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c	7d	8a	8b	8c	8d	9a	9b	9c
4	7	4	4	4	3	7	3	6	6	3	4	8	4	5	4	7	2	5	3	6	3	3	5	5	4	4	8