

I.

1. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert! Az x és az y valós számokat jelölnek.

$$\left. \begin{aligned} \log_2(2x + y) - \log_2(x - 1,5y) &= 2 \\ \log_3(x + y) + \log_3(x - y) &= 2 + \log_3 5 \end{aligned} \right\}$$

2. a) Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 0,5x + 2$ és az $y = -0,5x + 4$ egyeneseket!

b) Az x tengely, az y tengely és a két ábrázolt egyenes közrefog egy konvex négyszöget. Mekkora ennek a négyszögnek a területe?

c) Az x tengely, az y tengely és a két ábrázolt egyenes hat metszéspontja közül négy egy konkáv négyszög négy csúcsa. Mekkora ennek a konkáv négyszögnek a kerülete?

3. A Pécsre közlekedő vonat első osztályú fülkájében hatan utaznak egy tudományos konferenciára. A vonat indulása után kiderül, hogy a hat ember között van kettő, aki mindenkit ismer az útitársak közül, a többiek pontosan négy-négy útitársat ismernek régebről. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

a) Szemléltesse gráffal az ismeretségeket!

b) Az ismerősök a fülkébe lépve kézfogással köszöntötték egymást. Hány kézfogás történt?

c) A hat útitárs három kétágyas szobában nyer elhelyezést. Hányféle szobabeosztást lehet készíteni a hat útitársnak, ha a szobák között nem teszünk különbséget?

4. Az $ABCDEFGH$ téglatest élei: $AB = 10$; $AD = 8$; $AE = 6$. Legyenek az A csúcsból induló élvektorok rendre: $\vec{AB} = \mathbf{a}$; $\vec{AD} = \mathbf{b}$, $\vec{AE} = \mathbf{c}$. Az A csúcsból e három élvektor, továbbá három lapátlóvektor és egy testátlóvektor indul ki. Adja össze ezt a hét vektort, az összegvektort jelölje \vec{AP} .

a) Fejezze ki \vec{AP} vektort az \mathbf{a} ; \mathbf{b} és \mathbf{c} élvektorokkal!

b) Milyen hosszú az \vec{AP} ?

c) Mekkora szöveget zár be \vec{AP} az \vec{AE} vektorral?

d) Mennyi az $\vec{AS} \cdot \vec{AP}$ értéke, ha S a HFC háromszög súlypontja?

II.

Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Oldja meg az alábbi egyenletet, ahol a p paraméter valós számot jelöl!

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{p}{x^2 + 2x} + \frac{1}{2x - x^2} = 0$$

Van-e olyan p valós szám, amely esetén két különböző gyöke van az egyenletnek?

Van-e olyan p valós szám, amely esetén nincs gyöke az egyenletnek?

6. Daninak két kedvenc tantárgya van, a matematika és a biológia.

a) Dani az egyik délután egy kisállat-kereskedés akváriumában megszámolta a nagy piros és a kis csíkos halakat. A nagy piros halak száma p , a kis csíkosaké c . Testvérének, Katának nem árulta el, hány halat számolt meg, de az alábbiakat elmondta neki:

„A 4, a p és a c számok ebben a sorrendben egy mértani, a p , a c és a 40 számok pedig ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymás utáni tagjai.” Hány darab nagy piros és hány darab kis csíkos halat számolt meg Dani az akváriumban?

b) Dani vásárolt egy nagyon nagy akváriumot, és 100 darab apró halat telepített bele. A telepítés és a gondozás jól sikerült, minden hónapban 20 %-kal nőtt az állomány. Dani minden második hónap végén eladta a halainak mindig ugyanannyi százalékát. A 24. hónap végén az akváriumában 252 darab hal maradt. Kéthavonta az állomány hány százalékát adta el Dani?

c) Kata kapott a születésnapjára Danitól 20 darab halat: 5 nagy pirosat és 15 kis csíkosat egy gömbakváriumba. A két gyerek növényeket helyezett el Kata akváriumába, és ehhez egy befőttes üvegbe kis időre átraktak 8 darab halat. A halak „kihalászása” találmra történt.

Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 8 átrakott hal között éppen 3 darab nagy piros hal volt?

7. Egy önkormányzatnál 220 dolgozó bruttó bére augusztus hónapban az alábbi táblázat szerint alakult:

Bér (ezer forintban)	68	108	154	184	225
Dolgozók száma	25	65	70	44	16

a) Ábrázolja a 220 dolgozó bérének eloszlását oszlopdiaagramon!

b) Mennyi az augusztusi bruttó bérek átlaga és szórása?

c) Mennyi az augusztusi nettó bérek átlaga? (A bruttó bér a nettó bér 165 %-a.)

d) Szeptemberben minden dolgozó bruttó bére 2500 Ft-tal nő. Hogyan változik a bruttó bérek szórása?

8. Az f függvényt a $[0; 5]$ intervallumon értelmezzük: $f(x) = 3\cos x - \cos(-x)$.

a) Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e! A válaszait indokolja!

➤ Az f függvény korlátos.

➤ Az f függvény minimumhelye és legnagyobb értéke is irracionális szám.

b) Mekkora területű síkidomot határol az x tengely $[0; 5]$ intervalluma; az y tengely $[0; f(0)]$ intervalluma; az $x = 5$ egyenes $[0; f(5)]$ intervalluma és az f függvény görbéje?

9. Melyek azok az N kétjegyű pozitív egész számok, amelyekre a következő négy állítás közül pontosan kettő igaz és kettő hamis:

➤ Az N osztható 7-tel.

➤ Az N a 29 többszöröse.

➤ Az $N + 11$ négyzetszám.

➤ Az $N - 13$ négyzetszám.

Pontszámok:

1	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	4d	5	6a	6b	6c	7a	7b	7c	7d	8a	8b	9
11	2	6	5	4	3	6	2	3	3	6	16	5	7	4	3	6	3	4	6	10	16