I.

1. a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x^2 = |x-6|$$

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} \lg(x+y) &= 2\lg x \\ \lg x &= \lg 2 + \lg(y-1) \end{aligned}\right\}$$

2. Egy családnak olyan téglalap alakú telke van, melynek két szomszédos oldala 68 m, illetve 30 m hosszú. A telek egyik sarkánál úgy rögzítettek egy kerti locsoló berendezést, hogy a telek rövidebb oldalától 4 m-re, a vele szomszédos oldaltól 3 m-re legyen. A locsoló berendezés körbe forgó locsolófeje azt a részt öntözi, amely a rögzítés helyétől legalább 0,5 m-re, de legfeljebb 4 m-re van. A telek mekkora területű részét öntözi a locsoló berendezés, és ez hány százaléka a telek területének?

3. Egy dolgozó az év végi prémiumként kapott 1 000 000 Ft-ját akarja kamatoztatni a következő nyárig, hat hónapon át. Két kedvező ajánlatot kapott. Vagy kéthavi lekötést választ kéthavi 1,7%-os kamatra, kéthavonkénti tőkésítés mellett, vagy a forintot átváltja euróra, és az összeget havi 0,25%-os kamattal köti le hat hónapra, havi tőkésítés mellett.

a) Mennyi pénze lenne hat hónap után a forintszámlán az első esetben? (Az eredményt Ft-ra kerekítve adja meg.)

b) Ha ekkor éppen 252 forintot ért egy euró, akkor hány eurót vehetne fel hat hónap múlva a második ajánlat választása esetén? (Az eredményt két tizedes jegyre kerekítve adja meg.)

c) Legalább hány százalékkal kellene változnia a 252 forint/euró árfolyamnak a félév alatt, hogy a második választás legyen a kedvezőbb? (Az eredményt két tizedes jegyre kerekítve adja meg.)

(A tőkésítés melletti befektetés azt jelenti, hogy a tőkésítési időszak alatt elért kamatot az időszak végén hozzáadják az időszak kezdetén befektetett tőkéhez, és a következő időszakban az így kapott, kamattal megnövelt összeg után számítják a kamatot. Ez a folyamat annyiszor ismétlődik, ahány tőkésítési időszak van a befektetés időtartama alatt.)

4. Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk?

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy dobásnál a hat dobott szám összege legalább 34 lesz?

II.

Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Az *ABC* háromszög körülírt körének sugara 26 cm, $BAC\angle = 60°$.

a) Számítsa ki a *BC* oldal hosszát!

b) Hány fokos a háromszög másik két szöge, ha az *AC* oldal *b* cm, az *AB* oldal pedig 3*b* cm hosszúságú?

A keresett értékeket egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!

6. Adott az f függvény: $f:]-1; 6[\to \mathbf{R}$; $f(x) = -4x^3 + 192x$

a) Határozza meg f zérushelyeit, és elemezze az f függvényt monotonitás szempontjából!

Jelölje c az f értelmezési tartományának egy pozitív elemét.

b) Határozza meg a c értékét úgy, hogy az x tengely $[\,0\,;\,c\,]$ szakasza, az $x - c = 0$ egyenletű egyenes és az f grafikonja által közbezárt síkidom területe 704 területegységnyi legyen!

7. A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.

a) Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól? (Ezt nevezzük a közelítő számítás relatív hibájának.)

b) Igazolja, hogy a csonkakúp térfogatára – a fentiekben leírt útmutatás alapján kapott – közelítő érték sohasem nagyobb, mint a csonkakúp térfogatának pontos értéke!

Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának arányát, és legyen $x > 1$. Bizonyítható, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibáját százalékban mérve a következő függvény adja meg:

$$f\colon\,]\,1\,;\,+\infty\,[\to \mathbf{R}; \quad f(x) = 25\cdot\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

c) Igazolja, hogy f -nek nincs szélsőértéke!

8. Hat úszó: A, B, C, D, E és F indul a 100 méteres pillangóúszás döntőjében. Egy fogadóirodában ennek a döntőnek az első, a második és a hármadik helyezettjére lehet tippelni egy szelvényen. Az a fogadószelvény érvényes, amelyen megnevezték az első, a második és a harmadik helyezettet. Ha a fogadó valamelyik helyezésre nem ír tippet, vagy a hat induló nevén kívül más nevet is beír, vagy egy nevet többször ír be, akkor szelvénye érvénytelen. Holtverseny nincs, és nem is lehet rá fogadni.

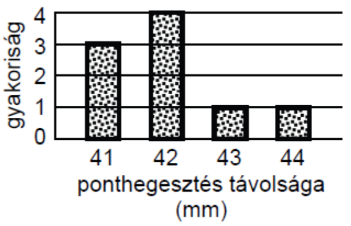
a) Hány szelvényt kell kitöltenie annak, aki minden lehetséges esetre egy-egy érvényes fogadást akar kötni?

A döntő végeredménye a következő lett: első az A, második a B, harmadik a C versenyző.

b) Ha egy fogadó az összes lehetséges esetre egy-egy érvényes szelvénnyel fogadott, akkor hány darab legalább egytalálatos szelvénye lett? (Egy szelvényen annyi találat van, ahány versenyző helyezése megegyezik a szelvényre írt tippel.)

9. Egy ipari robotnak az a feladata, hogy a munkaasztalra helyezett lemezen ponthegesztést végezzen. Minden egyes lemezen a szélétől adott távolságra egyetlen ponthegesztést végez. Ellenőrzésnél megvizsgálják, hogy a robot mekkora távolságra végezte el a hegesztést. A méréshez olyan digitális műszert használnak, amelynek kijelzője egész milliméterekben mutatja a mért távolságokat. A minőségellenőr véletlenszerűen kiválasztott kilenc lemezt a már elkészültek közül, és azokon az alábbi gyakorisági diagramnak megfelelő távolságokat mérte.

a) Számítsa ki a mért távolságok átlagát és szórását!



Ha a minőségellenőr bármely tíz, véletlenszerűen választott lemezen a mért távolságok szórását 1 milliméternél nagyobbnak találja, akkor a robotot le kell állítani, és újra el kell végezni a robot beállítását.

b) Tudjuk, hogy az ellenőr a már kiválasztott kilenc lemezhez egy olyan tizediket választott, hogy ezen minőségi követelmény alapján nem kellett leállítani a robotot. (Ehhez a kilenc lemezhez tartozó adatokat adtuk meg a feladat elején!) Mekkora távolságot mérhetett a minőségellenőr ezen a tizedik lemezen (a fent leírt mérőműszert használva)?

Pontszámok:

1a	1b	2	3a	3b	3c	4a	4b	5a	5b	6a	6b	7a	7b	7c	8a	8b	9a	9b
5	9	11	3	4	5	5	9	4	12	7	9	3	7	6	3	13	5	11