I.

1. Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek. Később Réka is átnézte ugyanazt a – javítatlan – szöveget, és ő is 30 hibát talált. Réka az Anett által megtalált hibákból 8-at vett észre, a Berta által észleltekből 11-et. Mindössze 5 olyan hiba volt, amit mind a hárman észrevettek.

a) Együtt összesen a szöveg hány hibáját fedezték fel?

b) A megtalált hibák hány százalékát vették észre legalább ketten?

2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}=2$$

3. Egy utazási iroda az országos hálózatának 55 értékesítő helyén kétféle utat szervez Párizsba. Az egyiket autóbusszal (A), a másikat repülővel (R). Egy adott turnusra nézve összesítették az egyes irodákban eladott utak számát. Az alábbi táblázatból az összesített adatok olvashatók ki. Pl. az (1;2) „koordinátájú” 5-ös szám azt jelöli, hogy 5 olyan fiókiroda volt, amelyik az adott turnusra 1 db autóbuszos és 2 db repülős utat adott el.

R típusú eladott utak száma \ A típusú eladott utak száma	0	1	2	3	4
0	1	1	0	1	2
1	1	2	2	3	1
2	1	5	2	4	3
3	0	3	1	9	2
4	1	3	3	2	2

a) Összesen hány autóbuszos és hány repülős utat adtak el a vizsgált turnusra az 55 fiókban?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 55 fiókiroda közül véletlenszerűen választva egyet, ebben az irodában 5-nél több párizsi utat adtak el?

4. Egy urnában csak piros, zöld és kék golyók vannak. A piros golyók száma 18. Egy golyó kihúzása esetén annak a valószínűsége, hogy nem piros golyót (azaz zöldet vagy kéket) húzunk $\frac{1}{15}$-del kisebb, mint azé, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Annak a valószínűsége viszont, hogy kék vagy piros golyót húzunk $\frac{11}{10}$-szer nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Hány zöld és hány kék golyó van az urnában?

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Egy háromszög két oldalegyenese: az x tengely, valamint az $y=\frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is: $(x-4)^2+(y-2)^2=4$.
Írja fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlő szárú, és

a) az alapja az x tengelyre illeszkedik;

b) az adott oldalegyenesek a háromszög száregyenesei!

6. a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x)=x^3+kx^2+9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl.)
Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ lokális szélsőérték-helye a függvénynek!
Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvénynek lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye!
Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték-helye is!

b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x)=x^3-9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját!

7. Annának az IWIW-en 40 ismerőse van. (Az IWIW weboldalon lehetőség van az egymást ismerő emberek kapcsolatfelvételére. Ebben a feladatban minden ismeretséget kölcsönösnek tekintünk.) Anna ismerőseinek mindegyike Anna többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer.

a) A szóba került 41 ember között összesen hány ismeretség áll fenn?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül véletlenszerűen választva kettőt, ők ismerik egymást?

c) Válasszunk most a 41 személy közül véletlenszerűen kettőt! Mennyi a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást?

8. Legyen n pozitív egész. Adottak az alábbi sorozatok:

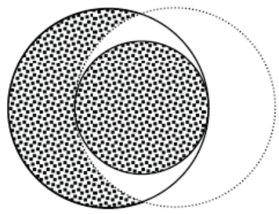
$\{a_n\}$, ahol $a_n=(-2)^n+2^n$

$\{b_n\}$, ahol $b_n=|n-23|-|n-10|$

$\{c_n\}$, ahol $c_n=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)^2$

Vizsgálja meg mindhárom sorozatot korlátosság és monotonitás szempontjából! Válaszoljon mindhárom esetben, hogy a sorozat korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem! (Válaszait indokolja!) Korlátos sorozat esetében adjon meg egy alsó és egy felső korlátot!

9. Klári teasüteményt sütött. A meggyúrt tésztát olyan „téglatest” alakúra nyújtotta ki, amelynek a felülről látható lapja 30 cm × 60 cm méretű téglalap. Majd egy henger alakú szaggatóval (határoló körének sugara 3 cm) „körlapokat” vágott ki a tésztából. Ezután a körlapokból először „holdacskákat” vágott le úgy, hogy a szaggató határoló körének középpontját a már kivágott körlap középpontjától 2 cm távolságra helyezte el, és így vágott bele a körlapba. (Minden bevágásnál csakis egy körlapot vágott ketté.) Miután minden körlapból levágott egy „holdacskát”, a körlapokból visszamaradt részek mindegyikéből – egy másik szaggatóval – kivágott egy-egy lehető legnagyobb körlap alakú süteményt.



a) Hány cm^2 területű egy „holdacska” felülről látható felülete? (Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!)

Klári a „holdacskák” és a kis körlapok elkészítése után visszamaradt tésztát ismét összegyúrta, majd ugyanolyan vastagságúra nyújtotta ki, mint az első esetben, de most négyzet alakú lett a kinyújtott tészta.

b) Hány cm hosszú ennek a négyzetnek az oldala, ha Klári a 30 cm × 60 cm-es téglalapból eredetileg 50 darab 3 cm sugarú körlapot szaggatott ki? (Az eredményt egészre kerekítve adja meg!)

Pontszámok:

1a	1b	2	3a	3b	4	5a	5b	6a	6b	7a	7b	7c	8	9a	9b
9	4	10	7	7	14	7	9	11	5	5	5	6	16	11	5