I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $(x-2)\cdot\lg\left(x^2-8\right)=0$

b) $x^2-|x|=6$

2. A mosogatógépünkön háromféle program van. Egy mosogatáshoz az *A* program 20%-kal több elektromos energiát, viszont 10%-kal kevesebb vizet használ, mint a *B* program.
A *B* program 30%-kal kevesebb elektromos energiát és 25%-kal több vizet használ egy mosogatáshoz, mint a *C* program.
Mindhárom program futtatásakor 40 Ft-ba kerül az alkalmazott mosogatószer.
Egy mosogatás az *A* programmal 151 Ft-ba, a *B* programmal 140 Ft-ba kerül.

Mennyibe kerül a *C* programmal egy mosogatás?

3. Jelölje *H* a $[0;2\pi[$ intervallumot. Legyen *A* a *H* azon *x* elemeinek halmaza, amelyekre teljesül a $2^{\sin x}>1$ egyenlőtlenség, és *B* a *H* halmaz azon részhalmaza, amelynek *x* elemeire teljesül a $2^{\cos x}<1$ egyenlőtlenség.

Adja meg az *A* halmazt, a *B* halmazt és az $A\setminus B$ halmazt!

4. Az *ABC* háromszögben $AB=2$, $AC=1$, a *BC* oldal hossza pedig megegyezik az *A* csúcsból induló súlyvonal hosszával.

a) Mekkora a *BC* oldal hossza? A hossz pontos értékét adja meg!

b) Mekkora a háromszög területe? A terület pontos értékét adja meg!

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Egy urnában 5 azonos méretű golyó van, 2 piros és 3 fehér. Egyesével, és mindegyik golyót azonos eséllyel húzzuk ki az urnából a bent levők közül.

a) Hány különböző sorrendben húzhatjuk ki az 5 golyót, ha a kihúzott golyót nem tesszük vissza, és az azonos színű golyók nem különböztethetők meg egymástól?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsó (ötödik) húzás előtt az urnában egy darab fehér golyó marad?

Az eredeti golyókat tartalmazó urnából hatszor húzunk úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hat húzásból legfeljebb kétszer húzunk piros golyót? (A valószínűséget három tizedesjegyre kerekített értékkel adja meg!)

6. Egy középiskola 12. osztályának egyik csoportjában minden tanuló olyan matematika dolgozatot írt, amelyben 100 pont volt az elérhető maximális pontszám. A csoport eredményéről a következőket tudjuk: 5 tanuló maximális pontot kapott a dolgozatára, minden tanuló elért legalább 60 pontot, és a dolgozatok pontátlaga 76 pont volt. Minden tanuló egész pontszámmal értékelt dolgozatot írt.

a) Legalább hányan lehettek a csoportban?

b) Legfeljebb hány diák dolgozata lehetett 60 pontos, ha a csoport létszáma 14?

A 14 fős csoportból Annának, Balázsnak, Csabának, Dorkának és Editnek lett 100 pontos a dolgozata. Pontosan hatan írtak 60 pontos dolgozatot, és csak egy olyan tanuló volt, akinek a pontszáma megegyezett az átlagpontszámmal.

c) Hányféleképpen valósulhatott ez meg? (A csoport két eredményét akkor tekintjük különbözőnek, ha a csoport legalább egy tanulójának különböző a dolgozatra kapott pontszáma a két esetben.)

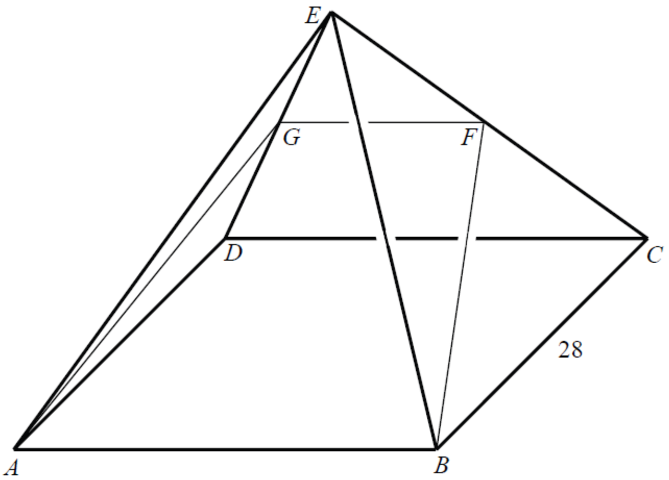
7. Adott a $K(t) = t^2 + 6t + 5$ polinom. Jelölje H a koordinátasík azon $P(x; y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $K(x) + K(y) \le 0$.

a) A H halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont az $C(-3; -3)$ ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van?

Az f függvényt a következőképpen definiáljuk: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

b) Számítsa ki az f függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidom területét!

8. Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet. A gúla alapéle 28 egység hosszú. Legyen F a CE oldalélnek, G pedig a DE oldalélnek a felezőpontja. Az $ABFG$ négyszög területe 504 területegység. Milyen hosszú a gúla oldaléle?



9. Egy bank a „Gondoskodás” nevű megtakarítási formáját ajánlja újszülöttek családjának. A megtakarításra vállalkozó családok a gyermek születését követő év első banki napján számlát nyithatnak 100 000 forint összeggel. Minden következő év első banki napján szintén 100 000 forintot kell befizetniük a számlára. Az utolsó befizetés annak az évnek az első banki napján történhet, amely évben a gyermekük betölti a 18. életévét. A bank év végén a számlán lévő összeg után évi 8%-os kamatot ad, amit a következő év első banki napjára ír jóvá.
A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján férhet hozzá a számlához.

a) Mekkora összeg van ekkor a számlán? A válaszát egész forintra kerekítse! A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján felveheti a számláján lévő teljes összeget. Ha nem veszi fel, akkor választhatja a következő lehetőséget is: Hat éven keresztül minden év első banki napján azonos összeget vehet fel. Az első részletet a 18. születésnapját követő év első banki napján veheti fel. A hatodik pénzfelvétellel a számla kiürül. Ha ezt a lehetőséget választja, akkor a bank – az első pénzfelvételtől számítva – minden év végén a számlán lévő összeg után évi 5%-os kamatot garantál, amit a következő év első banki napjára ír jóvá.

b) Ebben az esetben mekkora összeget vehet fel alkalmanként? A válaszát egész forintra kerekítse!

Pontszámok:

1a	1b	2	3	4a	4b	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	8	9a	9b
5	5	14	13	9	5	4	4	8	5	4	7	9	7	16	8	8