I.

1. Kinga 10. születésnapja óta kap havi zsebpénzt a szüleitől. Az első összeget a 10. születésnapján adták a szülők, és minden hónapban 50 Ft-tal többet adnak, mint az azt megelőző hónapban. Egy bizonyos hónapban, mikor éppen 1850 Ft volt a havi zsebpénze, összeadta az addig kapott összes zsebpénzét. Az összeg 35100 Ft lett. Mennyi volt Kinga induló zsebpénze, és hány hónap telt el a 10. születésnapja óta?

2. Az ENSZ 1996-ban megjelent táblázatának egy részlete a nyolc legnagyobb népességszámú ország népességi adatait tartalmazza 1988-ban, és egy népesedésdinamikai modell előrejelzése alapján 2050-ben.

	1988		**2050 (előrejelzés)**	
Sorrend	**Ország**	**Népesség (millió fő)**	**Ország**	**Népesség (millió fő)**
1	Kína	1255	India	1533
2	India	976	Kína	1517
3	Egyesült Államok	274	Pakisztán	357
4	Indonézia	207	Egyesült Államok	348
5	Brazília	165	Nigéria	339
6	Oroszország	148	Indonézia	318
7	Pakisztán	147	Brazília	243
8	Japán	126	Banglades	218

(World Population Prospects: The 1996 Revision)

Feltételezzük, hogy Pakisztán lakossága 1988 és 2050 között minden évben ugyanannyi százalékkal nő, mint amennyi százalékkal az előző évben növekedett.

a) Ezzel a feltételezéssel élve – millió főre kerekítve – hány lakosa lesz Pakisztánnak 2020-ban? (Az évi százalékos növekedés két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon!)

b) A táblázat mindkét oszlopában szereplő országok népességi adataira vonatkozóan mennyivel változik az átlagos lakosságszám és a medián 1988 és 2050 között? (Válaszát millió főben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg.)

3. Egy 32 fős érettségiző osztály tanulói három különböző táncot mutatnak be a szalagavató bálon. Az alábbi táblázat az egyes táncokban fellépő diákok számát mutatja nemenkénti bontásban.

	Keringő	Kán-kán	Hip-hop	Egyik sem
Lány	9	6	10	2
Fiú	9	0	4	2

Van 2 olyan lány, aki mindhárom táncban fellép, ugyanakkor nincs olyan fiú az osztályban, aki egynél több produkcióban részt venne.

a) A lányok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, mennyi annak a valószínűsége, hogy mindketten táncolnak a kán-kánban?

b) Az osztály tanulói közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mennyi a valószínűsége annak, hogy az illető pontosan két táncban szerepel?

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x > 0$, $x \neq 1$ és $y > 0$, $y \neq 1$.

$$\log_x y + \log_y x = 2$$
$$\sin(2x + 3y) + \sin(4x + y) = 1$$

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

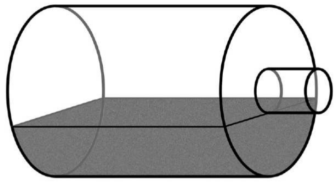
5. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik illeszkedik a $P(2;\ 5)$ pontra, valamint az $x + y = 4$ és az $x + y = 6$ egyenletű egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek első koordinátájának különbsége 3.

6. a) Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét:
A: a dobott pontok összege prím;
B: a dobott pontok összege osztható 3-mal.

b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni?

c) Az *ABCD* négyzet csúcsai: $A(0;\ 0)$, $B\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f\colon \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja?

7. Egy pillepalack alakja olyan forgáshenger, amelynek alapköre 8 cm átmérőjű. A palack fedőkörén található a folyadék kiöntésére szolgáló szintén forgáshenger alakú nyílás. A két hengernek közös a tengelye. A kiöntő nyílás alapkörének átmérője 2 cm. A palack magassága a kiöntő nyílás nélkül 30 cm. A palack vízszintesen fekszik úgy, hogy annyi folyadék van benne, amennyi még éppen nem folyik ki a nyitott kiöntő nyíláson keresztül.



a) Hány deciliter folyadék van a palackban? (Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

A palack tartalmát kiöntve, a palackot összenyomva, annak eredeti térfogata $2p$ százalékkal csökken. Egy hulladékot újrahasznosító cég (speciális gép segítségével) az ilyen módon tömörített palack térfogatát annak további p százalékával tudja csökkenteni. Az összenyomással, majd az ezt követő gépi tömörítéssel azt érik el, hogy a palackot eredeti térfogatának 19,5 százalékára nyomják össze.

b) Határozza meg p értékét!

8. a) Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben az $f : [0;\ 5] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ függvényt!

b) Tekintsük az $\left|(x-2)^2 - 1\right| = k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter.
Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében!

c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k \in\ ]-6;\ 6[$ intervallumon!

d) Adja meg a **c)**-beli függvény értékkészletét!

9. Öt, egymástól távol eső tanya között kábeleket feszítenek ki, bármely két tanya között legfeljebb egyet.

a) Elvileg összesen hány különböző hálózatot lehetséges létrehozni a tanyák között? (A hálózatban a kifeszített kábelek száma 0-tól 10-ig bármennyi lehet. Két hálózatot akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan összeköttetés, amely az egyikben létezik, de a másikban nem.)

b) Takarékossági okokból csak 4 kábelt feszítenek ki úgy, hogy a hálózat azért összefüggő legyen. (Összefüggőnek tekintünk egy hálózatot, ha a kábelek mentén bármely tanyáról bármely másikba el lehet jutni, esetleg más tanyák közbeiktatásával.) Hány különböző módon tehetik ezt meg, ha az egyes tanyákat megkülönböztetjük egymástól?

Pontszámok:

1	2a	2b	3a	3b	4	5	6a	6b	6c	7a	7b	8a	8b	8c	8d	9a	9b
12	7	5	5	9	13	16	6	5	5	9	7	5	7	2	20	4	12